Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant :

$$P(X^2) + P(X)P(X+1) = 0 \quad (\star)\,.$$

Solution : *Soit P un polynôme solution de l'équation et $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P. En utilisant l'égalité $(\star)$, on montre par une récurrence facile que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\alpha^{2^n}) = P(\alpha) = 0$. Mais P possède un nombre fini de racines donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha^{2^N} = \alpha$ Forcément, $\alpha = 0$ ou alors $\alpha^{2^N-1} = 1$, et alors $|\alpha| = 1$.*

Mais l'égalité $(\star)$ amène aussi $P((\alpha-1)^2) = P(\alpha)P(\alpha-1) = 0$, donc $(\alpha-1)^2$ est aussi une racine de P et on doit avoir $\alpha - 1 = 0$ ou $|\alpha - 1| = 1$.

Les seules racines de module 1 sont $-j$ ou $-j^2$ (à l'intersection des cercles de rayon 1 centrés respectivement en 0 et en 1) ou 1.

Mais $-j$ ne peut être une racine de P. En effet, comme $(-j-1)^2 = j$, j devrait aussi être une racine de P ce qui n'est pas possible car on n'a pas $|j-1| = 1$. De même comme $(-j^2-1)^2 = j^2$, $-j^2$ ne peut être une racine de P.

En conclusion, les seules racines éventuelles de P sont 0 et 1. Donc $P = \lambda X^k(1-X)^p$ où $k, p \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.. Comme P doit vérifier $(\star)$, il vient que $\lambda = -1$, et finalement $\boxed{P = X^k(1-X)^p}$. La réciproque est immédiate.

Références