Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$P(X^2) = (P(X))^2.$$

Solution : *Supposons P non-nul. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine complexe de P. On montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, α^{2^k} est encore racine de P. Mais puisque P n'admet qu'un nombre fini de racines, il est nécessaire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$\alpha^{2^k} = \alpha$$

Par conséquent, $\alpha = 0$ ou alors $\alpha^{2^k-1} = 1$, et alors $|\alpha| = 1$. On peut alors noter $\alpha = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$.

Comme $(P(e^{i\frac{\theta}{2}}))^2 = P(e^{i\theta})$, alors $e^{i\frac{\theta}{2}}$ est encore racine. Par récurrence, on montre que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $e^{i\frac{\theta}{2^k}}$ est encore racine. La seule possibilité pour qu'il y ait un nombre fini de racines est que $\theta = 0$, c'est-à-dire $\alpha = 1$.

Les seules racines de P sont donc 0 et 1. Donc $P = \lambda X^n(1-X)^p$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $P(X^2) = P(X)^2 \Rightarrow \lambda X^{2n}(1-X)^p(1+X)^p = \lambda X^{2n}(1-X)^{2p}$ et nécessairement,

$$\boxed{P = X^n}$$

On vérifie réciproquement que les polynômes X^n avec $n \geqslant 0$ et le polynôme nul conviennent.

Références