Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

18 juin 2022

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$P(X^2) = (X^2+1)P(X).$$

Indication 0.0 : *Trouver des racines de P, les mettre en facteur ...*

Solution : *Soit P un tel polynôme. Alors $P(i^2) = 0$, donc -1 est racine de P. Il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X+1)Q(X)$, mais alors $(X^2+1)Q(X^2) = (X^2+1)(X+1)Q(X)$, donc Q vérifie*

$$Q(X^2) = (X+1)Q(X)$$

(on peut simplifier par un polynôme non-nul). Alors $Q((-1)^2) = 0$, et donc 1 est racine de Q : il existe $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(X) = (X-1)R(X)$. R vérifie alors $(X^2-1)R(X^2) = (X+1)(X-1)R(X)$, c'est-à-dire

$$R(X^2) = R(X).$$

Mais si on introduit le polynôme $S(X) = R(X) - R(2)$, alors on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S(2^{2^n}) = 0$, donc S possède une infinité de racines, donc $S = 0$ et alors R est constant. Finalement, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$P(X) = \lambda(X+1)(X-1).$$

Réciproquement, tout polynôme de cette forme convient.

Références