Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Déterminer tous les polynômes complexes P tels que $P(1-2X) = P(X)$.

Solution : *Soit z une racine de P dans $\mathbb{C}$. $1-2z$ est aussi une racine de P. On s'intéresse donc à la suite z_n définie par $z_0 = z$ et $z_{n+1} = 1 - 2z_n$. L'étude est classique : on résout $x = 1-2x$ ce qui donne $x = \frac{1}{3}$. Ensuite on regarde la suite auxiliaire $v_n = z_n - \frac{1}{3}$. On a $v_{n+1} = 1 - 2z_n - \frac{1}{3} = 1 - 2v_n - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = -2v_n$, autrement dit (v_n) est une suite géométrique de raison -2. Elle prend une infinité de valeurs sauf pour $v_0 = 0$ soit $z = \frac{1}{3}$. On a donc deux possibilités,*

— $P = 0$.

— $P = \lambda\left(X - \dfrac{1}{3}\right)^m$, $\lambda \neq 0$.

Dans le deuxième cas, P admet λ comme coefficient dominant et $P(1-2X) = \lambda\left(1 - 2X - \dfrac{1}{3}\right)^m$ admet $(-2)^m\lambda$ comme coefficient dominant. On en déduit $(-2)^m = 1$ et $m = 0$. Réciproquement, les polynômes constants conviennent bien.

Références