# Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 janvier 2022

***Exercice 0.1*** ★★ ***Pas de titre***

*Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) \in \mathbb{R}.$$

***Solution :*** *Soit $P = a_n X^n + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant la condition de l'énoncé. Puisque $a_0 = P(0)$, $a_0 \in \mathbb{R}$. Montrons que tous les coefficients de $P$ sont réels. Considérons le polynôme*

$$\overline{P} = \overline{a_n} X^n + \dots + \overline{a_0}$$

*et $H = P - \overline{P}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,*

$$P(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{P(x)} = P(x).$$

*Mais $\overline{P(x)} = \overline{a_n} x^n + \dots + \overline{a_0} = \overline{P}(x)$. Par conséquent,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = 0.$$

*Le polynôme $H$ a donc une infinité de racines, il est nul et donc $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\overline{a_i} = a_i$. Donc $P \in \mathbb{R}[X]$. Réciproquement, tout polynôme à coefficients réels vérifie la propriété.*

## Références