Polynômes réciproques

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

29 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Polynômes réciproques***

On appelle polynômes réciproque un polynôme dont la suite des coefficients est symétrique. Par exemple $1-2X+X^2$ *ou* $1+2X+2X^2+X^3$ *sont réciproques. Voir aussi le paragraphe* **??** *p.*??.

1. *Démontrer qu'un polynôme de degré* n *est réciproque si et seulement si* $\forall\, x \in \mathbb{K}^*, P(x) = x^n P\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. *Démontrer qu'un polynôme réciproque de degré impair admet* -1 *comme racine.*
3. *On suppose que* $P = (X+1)Q$. *Démontrer que si* P *est un polynôme réciproque alors* Q *l'est aussi.*
4. *Démontrer que le produit de deux polynômes réciproques est réciproque.*
5. *Résoudre* $x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$. *(*On utilisera les questions précédentes et on se souviendra de l'exercice précédent*).*
6. *On considère la suite de polynômes :* $P_0 = 1$ *et* $P_n = (1+nX)P_{n-1} + X(1-X)P'_{n-1}, (n \geqslant 1)$. *Démontrer que les* P_n *sont des polynômes réciproques.*

Solution :

1. *Si on pose* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *on a* $P\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{a_n}{x^n} + \dfrac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \ldots + \dfrac{a_1}{x} + a_0$ *et donc* $x^n P\left(\dfrac{1}{x}\right) = a_n + a_{n-1}x + \ldots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n$. *D'où le résultat en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.*
2. *Pour* P *polynôme réciproque de degré* $2p+1$, *on a* $P(-1) = (-1)^{2p+1} P\left(\dfrac{1}{-1}\right) = -P(-1)$. *D'où le résultat.*
3. *Soit* $n = \deg P$. *On a* $\deg Q = n-1$ *et* $\forall\, x \in \mathbb{K}^*, P(x) = x^n P\left(\dfrac{1}{x}\right)$. *On en déduit* $x^n P\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^n(\dfrac{1}{x}+1) Q\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *d'où* $(x+1)Q(x) = (x+1)x^{n-1}Q\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *d'où* $Q(x) =$

$x^{n-1}Q\left(\frac{1}{x}\right)$ ce qu'il fallait vérifier.

4. Soit P et Q deux polynômes réciproques de degrés respectifs n et m. On a $P(x) = x^nP\left(\frac{1}{x}\right)$ et $Q(x) = x^mQ\left(\frac{1}{x}\right)$. PQ est un polynôme de degré nm et on a $PQ(x) = x^{n+m}P\left(\frac{1}{x}\right)Q\left(\frac{1}{x}\right) = x^{n+m}PQ\left(\frac{1}{x}\right)$ ce qu'il fallait vérifier.
5. On a un polynôme réciproque de de degré impair. -1 est racine (évidente ?). On peut factoriser par $(x+1)$ et on trouve (algorithme de Horner) $x^5+3x^4-2x^3-2x^2+3x+1 = (x+1)(x^4+2x^3-4x^2+2x+1)$. On est donc amené à résoudre $x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\right) = x^2(y^2+2y-6)$ avec $y = x+\frac{1}{x}$. on trouve $y = 1+\sqrt{7}$ ou $y = 1-\sqrt{7}$. On résout donc $x+\frac{1}{x} = 1+\sqrt{7}$ ce qui donne deux racines $x_1 = \frac{1+\sqrt{7}+\sqrt{4+2\sqrt{7}}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{7}-\sqrt{4+2\sqrt{7}}}{2}$. $x+\frac{1}{x} = 1-\sqrt{7}$ donne aussi deux racines $x_3 = \frac{1-\sqrt{7}+\sqrt{4-2\sqrt{7}}}{2}$ et $x_4 = \frac{1-\sqrt{7}-\sqrt{4-2\sqrt{7}}}{2}$ sans oublier $x_5 = -1$.
6. Par récurrence, $P_0 = 1$ est réciproque. On suppose que P_{n-1} l'est aussi. On a alors $P_{n-1}(x) = x^{n-1}P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ et $P'_{n-1}(x) = (n-1)x^{n-2}P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-3}P'_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)$. D'où

$$\begin{aligned}
x^nP\left(\frac{1}{x}\right) &= x^n\left(1+\frac{n}{x}\right)P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) + x^n\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)P'_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= (x+n)P_{n-1}(x) + x^{n-1}P'_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2}P'_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= (x+n)P_{n-1}(x) - x^2P'_{n-1}(x) + (n-1)x^{n-1}P_{n-1}(x) + xP'_{n-1}(x) - (n-1)x^{n+2}P_{n-1}(x)\\
&= P_{n-1}(x)((x+n)+(n-1)x-n+1) + P'_{n-1}(x)(-x^2+x)\\
&= P_{n-1}(x)(nx+1) + P'_{n-1}(x)x(1-x).
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait vérifier.

Références