

Polynômes réciproques

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

29 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ Polynômes réciproques

On appelle polynôme réciproque un polynôme dont la suite des coefficients est symétrique. Par exemple $1 - 2X + X^2$ ou $1 + 2X + 2X^2 + X^3$ sont réciproques. Voir aussi le paragraphe ?? p.??.

1. Démontrer qu'un polynôme de degré n est réciproque si et seulement si $\forall x \in \mathbb{K}^*, P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. Démontrer qu'un polynôme réciproque de degré impair admet -1 comme racine.
3. On suppose que $P = (X + 1)Q$. Démontrer que si P est un polynôme réciproque alors Q l'est aussi.
4. Démontrer que le produit de deux polynômes réciproques est réciproque.
5. Résoudre $x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$. (On utilisera les questions précédentes et on se souviendra de l'exercice précédent).
6. On considère la suite de polynômes : $P_0 = 1$ et $P_n = (1+nX)P_{n-1} + X(1-X)P'_{n-1}$, ($n \geq 1$). Démontrer que les P_n sont des polynômes réciproques.

Références