

# Polynômes réciproques

Emmanuel Vieillard-Baron<sup>1</sup>, Alain Soyeur<sup>2</sup>, and François Capaces<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

<sup>2</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

<sup>3</sup>, ,

6 avril 2023

## Exercice 0.1 ★★ Polynômes réciproques

On appelle polynôme réciproque un polynôme dont la suite des coefficients est symétrique. Par exemple  $1 - 2X + X^2$  ou  $1 + 2X + 2X^2 + X^3$  sont réciproques. Voir aussi le paragraphe ?? p.??.

- Démontrer qu'un polynôme de degré  $n$  est réciproque si et seulement si  $\forall x \in \mathbb{K}^*, P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ .
- Démontrer qu'un polynôme réciproque de degré impair admet  $-1$  comme racine.
- On suppose que  $P = (X + 1)Q$ . Démontrer que si  $P$  est un polynôme réciproque alors  $Q$  l'est aussi.
- Démontrer que le produit de deux polynômes réciproques est réciproque.
- Résoudre  $x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$ . (On utilisera les questions précédentes et on se souviendra de l'exercice précédent).
- On considère la suite de polynômes :  $P_0 = 1$  et  $P_n = (1+nX)P_{n-1} + X(1-X)P'_{n-1}$ , ( $n \geq 1$ ). Démontrer que les  $P_n$  sont des polynômes réciproques.

### Solution :

- Si on pose  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  on a  $P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a_n}{x^n} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a_1}{x} + a_0$  et donc  $x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = a_n + a_{n-1} x + \dots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n$ . D'où le résultat en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.
- Pour  $P$  polynôme réciproque de degré  $2p + 1$ , on a  $P(-1) = (-1)^{2p+1} P\left(\frac{1}{-1}\right) = -P(-1)$ . D'où le résultat.
- Soit  $n = \deg P$ . On a  $\deg Q = n - 1$  et  $\forall x \in \mathbb{K}^*, P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ . On en déduit  $x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = x^n \left(\frac{1}{x} + 1\right) Q\left(\frac{1}{x}\right)$  d'où  $(x + 1)Q(x) = (x + 1)x^{n-1} Q\left(\frac{1}{x}\right)$  d'où  $Q(x) =$

$x^{n-1}Q\left(\frac{1}{x}\right)$  ce qu'il fallait vérifier.

4. Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes réciproques de degrés respectifs  $n$  et  $m$ . On a  $P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$  et  $Q(x) = x^m Q\left(\frac{1}{x}\right)$ .  $PQ$  est un polynôme de degré  $nm$  et on a  $PQ(x) = x^{n+m} P\left(\frac{1}{x}\right) Q\left(\frac{1}{x}\right) = x^{n+m} PQ\left(\frac{1}{x}\right)$  ce qu'il fallait vérifier.

5. On a un polynôme réciproque de de degré impair.  $-1$  est racine (évidente?). On peut factoriser par  $(x+1)$  et on trouve (algorithme de Horner)  $x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = (x+1)(x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 2x + 1)$ . On est donc amené à résoudre  $x^2\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4\right) = x^2(y^2 + 2y - 6)$  avec  $y = x + \frac{1}{x}$ . on trouve  $y = 1 + \sqrt{7}$  ou  $y = 1 - \sqrt{7}$ . On résout donc  $x + \frac{1}{x} = 1 + \sqrt{7}$  ce qui donne deux racines  $x_1 = \frac{1 + \sqrt{7} + \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}}{2}$  et  $x_2 = \frac{1 + \sqrt{7} - \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}}{2}$ .  $x + \frac{1}{x} = 1 - \sqrt{7}$  donne aussi deux racines  $x_3 = \frac{1 - \sqrt{7} + \sqrt{4 - 2\sqrt{7}}}{2}$  et  $x_4 = \frac{1 - \sqrt{7} - \sqrt{4 - 2\sqrt{7}}}{2}$  sans oublier  $x_5 = -1$ .

6. Par récurrence,  $P_0 = 1$  est réciproque. On suppose que  $P_{n-1}$  l'est aussi. On a alors  $P_{n-1}(x) = x^{n-1}P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)$  et  $P'_{n-1}(x) = (n-1)x^{n-2}P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-3}P'_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ . D'où

$$\begin{aligned} x^n P\left(\frac{1}{x}\right) &= x^n \left(1 + \frac{n}{x}\right) P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) + x^n \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) P'_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= (x+n)P_{n-1}(x) + x^{n-1}P'_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2}P'_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= (x+n)P_{n-1}(x) - x^2P'_{n-1}(x) + (n-1)x^{n-1}P_{n-1}(x) + xP'_{n-1}(x) - (n-1)x^{n-2}P_{n-1}(x) \\ &= P_{n-1}(x)((x+n) + (n-1)x - n + 1) + P'_{n-1}(x)(-x^2 + x) \\ &= P_{n-1}(x)(nx + 1) + P'_{n-1}(x)x(1-x). \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait vérifier.

## Références