Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

On définit par récurrence la suite de polynômes (P_n) :

$$\begin{cases} P_0 = 2, \quad P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n \end{cases}$$

1. *Calculer P_2 et P_3.*
2. *Déterminer le degré et le coefficient du terme dominant de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:*
$$P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}.$$
4. *En déduire une expression simple de $P_n(2\cos\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.*
5. *Déterminer les racines de P_n et en déduire une factorisation de P.*

Solution :

1. $P_2 = X^2 - 2$, $P_3 = X^2 - 3X$.
2. *Par récurrence, montrons que pour tout $n \geqslant 1$, le coefficient du terme dominant de P_n est 1 et $\deg P_n = n$. La propriété est clairement vraie aux rangs 1 et 2. Soit $n \geqslant 2$. Supposons que le coefficient du terme dominant de P_n et de P_{n-1} est 1 et que $\deg P_n = n$, $\deg P_{n-1} = n - 1$. Comme $P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$, il est clair que $\deg P_{n+1} = \deg P_n + 1 = n + 1$ et que le coefficient du terme dominant de P_n est 1. La propriété est prouvée par récurrence.*
3. *Démontrons à nouveau cette propriété par récurrence : celle-ci est vraie au rang 0. Soit $n \in \mathbb{N}$ Supposons que la propriété est vraie au rang n et au rang $n + 1$ et prouvons-la au rang $n + 2$:*
$$\begin{aligned} P_{n+2}\left(z + \frac{1}{z}\right) &= \left(z + \frac{1}{z}\right) P_{n+1}\left(z + \frac{1}{z}\right) - P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ &= \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \\ &= z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}} \end{aligned}$$

La propriété est alors prouvée par récurrence.

4. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Par application de la question précédente et utilisation des relations d'Euler :*

$$\begin{aligned} P_n(2\cos\theta) &= P_n\left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right) \\ &= e^{in\theta} + \frac{1}{e^{in\theta}} \\ &= \boxed{2\cos(n\theta)} \end{aligned}$$

5. *La question précédente nous invite à chercher les racines de P_n sous la forme $z = 2\cos\theta$. Remarquons que si $z \in [-2, 2]$, il existe un unique $\theta \in [0, \pi[$ tel que $z = 2\cos\theta$. Considérons donc $\theta \in [0, \pi[$ tel que $P_n(2\cos\theta)$. On a alors $\cos(n\theta) = 0$ c'est-à-dire $\theta = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. Les n nombres $2\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont tous distincts et comme $\deg = n$, ce sont les n racines de P_n. Le coefficient du terme dominant de P étant 1 on obtient :*

$$\boxed{P = \prod_{k=1}^{n}\left(X - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)}.$$

Références