Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Trouver les racines de

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{n-k} \cos k\alpha.$$

Solution : *Introduisons le polynôme* $Q = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{n-k} e^{ik\alpha}$. *Il est clair que* $P = \left(Q + \overline{Q}\right)/2$. *Mais d'après la formule du binôme,* $Q = \left(X + e^{i\alpha}\right)^n$ *et* $\overline{Q} = \left(X + e^{-i\alpha}\right)^n$. *L'ensemble des racines de* P *est exactement l'ensemble des racines de* $Q + \overline{Q}$. *Soit* a *une racine de* P. *Comme* $Q(a) + \overline{Q}(a) = 0$, $\left(a + e^{i\alpha}\right)^n = -\left(a + e^{-i\alpha}\right)^n$ *et il existe* $k \in [\![0, n-1]\!]$ *tel que* $a + e^{i\alpha} = e^{i\left(\pi + \frac{2k\pi}{n}\right)}\left(a + e^{-i\alpha}\right)$ *donc*

$$a = -\frac{e^{-i\alpha} e^{i + \frac{2k\pi}{n}} + e^{i\alpha}}{e^{i + \frac{2k\pi}{n}} + 1}.$$

On obtient ainsi n *valeurs possibles pour* a. *Comme* P *est de degré* n, *il a exactement* n *racines dans* $\mathbb{C}$ *et les* n *nombres complexes de la forme précédente constituent l'ensemble de toutes les racines de* P.

Références