Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère deux polynômes $(P,Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ *vérifiant*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \left|P(z)\right| = \left|Q(z)\right|.$$

Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$ *tel que* $P = uQ$.

Solution : *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{C}$, *on a* $P(\alpha) = 0 \iff Q(\alpha) = 0$. *Donc* P *et* Q *ont les mêmes racines. Comme tout polynôme de* $\mathbb{C}[X]$ *est scindé, le résultat est immédiat. Du moins tant que les racines sont simples. Sinon on écrit* $P = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{m} (X - \alpha_k)^{p_k}$ *et* $Q = \mu \displaystyle\prod_{k=1}^{m} (X - \alpha_k)^{q_k}$ *avec les* α_k *deux à deux distincts. Soit* $k_0 \in [\![1, m]\!]$ *Pour fixer les idées, on peut supposer* $p_{k_0} \leqslant q_{k_0}$. *En divisant par* $(z - \alpha_{k_0})^{p_{k_0}}$ *on obtient, pour* $z \neq \alpha_{k_0}$, $\left|\lambda \displaystyle\prod_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{m} (z - \alpha_k)^{p_k}\right| = \left|\mu\,(z - \alpha_{k_0})^{q_{k_0} - p_{k_0}} \prod_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{m} (z - \alpha_k)^{q_k}\right|$. *Supposons l'espace d'un instant que* $q_{k_0} > p_{k_0}$, *on obtiendrait, en faisant tendre* z *vers* α_{k_0}, $\left|\lambda \displaystyle\prod_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^{m} (\alpha_{k_0} - \alpha_k)^{p_k}\right| = 0$, *contradiction. Donc* $q_{k_0} = p_{k_0}$, *et ce* $\forall k_0 \in [\![1, m]\!]$. *Ce qu'il fallait démontrer. Finalement, c'était bien immédiat.*

Références