# Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

***Exercice 0.1*** ★ ***Pas de titre***

*Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.*

1. *Montrer que :*
$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = e^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$
2. *En déduire :*
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$
3. *En déduire :*
$$\sum_{k=0}^{n} k \sin k\theta.$$

***Solution :***

1. *Comme $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $e^{i\theta} \neq 1$ et en reconnaissant la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$, on a :*
$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k = \frac{1-e^{(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}} - e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} = \boxed{e^{in\frac{\theta}{2}} \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}}$$
2. *Par ailleurs :*
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right) = \boxed{\cos\left(n\frac{\theta}{2}\right) \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right) = \boxed{\sin\left(n\frac{\theta}{2}\right) \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}}$$

3. *Pour la dernière somme, il suffit de dériver l'égalité* $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \cos\left(n\frac{\theta}{2}\right) \dfrac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \dfrac{\sin \frac{(2n+1)\theta}{2}}{2\sin \frac{\theta}{2}} - \dfrac{1}{2}$ *par rapport à* $\theta$*. On trouve alors*

$$\sum_{k=0}^{n} k \sin k\theta = \frac{1}{4} \frac{(2n+1)\cos \frac{(2n+1)\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{(2n+1)\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

## Références