

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

2 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. on considère $P_n \in \mathbb{R}[X]$ défini par $P_n(X) = (2n - 1)X^{n+2} - (2n + 1)X^{n+1} + X^2 + X$.

1. Calculer le quotient euclidien Q_n de P_n par $(X - 1)^2$.
2. Démontrer qu'il existe un unique réel $x_n \geq 0$ tel que $Q_n(x_n) = 1$.
3. Établir que la suite (x_n) est convergente et préciser sa limite.

Solution :

1. On a $P_n(1) = 2n - 1 - (2n + 1) + 1 + 1 = 0$. $P'_n = (2n - 1)(n + 2)X^{n+1} - (n + 1)(2n + 1)X^n + 2X + 1$. D'où $P'_n(1) = (2n - 1)(n + 2) - (n + 1)(2n + 1) + 2 + 1 = 0$. Donc 1 est racine de P d'ordre au moins 2 et $(X - 1)^2$ divise P_n . On pose la division :

$$\begin{array}{r} (2n - 1)X^{n+2} \quad - (2n + 1)X^{n+1} \quad \quad \quad + \dots \\ - (2n - 1)X^{n+2} \quad + (4n - 2)X^{n+1} \quad - (2n - 1)X^n \quad + \dots \\ \hline \quad \quad \quad (2n - 3)X^{n+1} \quad - (2n - 1)X^n \quad + \dots \end{array} \left| \begin{array}{l} X^2 - 2X + 1 \\ (2n - 1)X^n + \dots \end{array} \right.$$

Il semblerait donc que $P_n = (2n - 1)X^n(X^2 - 2x + 1) + P_{n-1}$ en posant s'il le faut $P_0 = -X^2 - X + X^2 + X = 0$. Vérifions-le :

$$\begin{aligned} P_{n-1} + (2n - 1)X^n(X^2 - 2x + 1) &= (2n - 3)X^{n+1} - (2n - 1)X^n + X^2 + X + (2n - 1)X^{n+2} - 2(2n - 1)X^{n+1} + \dots \\ &= (2n - 1)X^{n+2} + [(2n - 3) - 4n + 2]X^{n+1} + \dots \end{aligned}$$

On en déduit que $P_n = (X^2 - 2x + 1) \sum_{k=1}^n (2k - 1)X^k$.

2. On a $Q_n(x) = x + 3x^2 + \dots + (2n - 1)x^n$. La fonction Q_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, avec $Q_n(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} Q_n(x) = +\infty$. Donc l'équation $Q_n(x) = 1$ admet une unique solution positive. Comme $Q_n(1) = n^2$, on a $0 \leq x_n \leq 1$.

3. On a $Q_{n+1}(x_n) = Q_n(x_n) + (2n+1)x_n^{n+1} = 1 + (2n+1)x_n^{n+1} > 1 = Q_{n+1}(x_{n+1})$. Donc, comme Q_{n+1} est croissante, la suite (x_n) est strictement décroissante. Comme elle est minorée par zéro, elle converge. Soit $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Pour $x \in [0, 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1)x^{n+2} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)x^{n+1} = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)x^{n+2} - (2n+1)x^{n+1} + x^2 + x}{(x-1)^2} = \frac{x^2 + x}{(x-1)^2}$. On pose $Q(x) = \frac{x^2 + x}{(x-1)^2}$. On a $1 - Q(\ell) = Q_n(x_n) - Q(x_n) + Q(x_n) - Q(\ell)$. Pour $n \geq 2$, on a $0 \leq x_n \leq x_2 = \frac{\sqrt{13}-1}{2} \leq \frac{1}{2}$. D'après la continuité de la fonction Q sur $[0, 1[$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(x_n) - Q(\ell) = 0$. Par ailleurs, $Q_n(x_n) - Q(x_n) = \frac{(2n-1)x_n^{n+2} - (2n+1)x_n^{n+1}}{(x_n-1)^2}$ donc $|Q_n(x_n) - Q(x_n)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{2n-1+2n+1}{(x_n-1)^2}$ et comme $\frac{1}{2} \leq 1 - x_n \leq 1$, on a $\frac{1}{(x_n-1)^2} \leq 4$ (toujours pour $n \geq 2$). On en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(x_n) - Q(x_n) = 0$. Finalement, $1 - Q(\ell) = 0$, donc $\ell^2 + \ell = \ell^2 - 2\ell + 1$ d'où $\ell = \frac{1}{3}$.

Références