Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. on considère $P_n \in \mathbb{R}[X]$ défini par $P_n(X) = (2n-1)X^{n+2} - (2n+1)X^{n+1} + X^2 + X$.

1. *Calculer le quotient euclidien Q_n de P_n par $(X-1)^2$.*
2. *Démontrer qu'il existe un unique réel $x_n \geqslant 0$ tel que $Q_n(x_n) = 1$.*
3. *Établir que la suite (x_n) est convergente et préciser sa limite.*

Solution :

1. *On a $P_n(1) = 2n - 1 - (2n+1) + 1 + 1 = 0$. $P_n' = (2n-1)(n+2)X^{n+1} - (n+1)(2n+1)X^n + 2X + 1$. D'où $P_n'(1) = (2n-1)(n+2) - (n+1)(2n+1) + 2 + 1 = 0$. Donc 1 est racine de P d'ordre au moins 2 et $(X-1)^2$ divise P_n. On pose la division :*

$$\begin{array}{rrrr|l} (2n-1)X^{n+2} & -(2n+1)X^{n+1} & & +\dots & X^2-2X+1 \\ \cline{5-5} -(2n-1)X^{n+2} & +(4n-2)X^{n+1} & -(2n-1)X^n & +\dots & (2n-1)X^n + \dots \\ & (2n-3)X^{n+1} & -(2n-1)X^n & +\dots & \end{array}$$

Il semblerait donc que $P_n = (2n-1)X^n(X^2-2x+1) + P_{n-1}$ en posant s'il le faut $P_0 = -X^2 - X + X^2 + X = 0$. Vérifions-le :

$$\begin{aligned} P_{n-1} + (2n-1)X^n(X^2-2x+1) = &\quad (2n-3)X^{n+1} - (2n-1)X^n + X^2 + X + (2n-1)X^{n+2} - 2(2n-1)X^{n+1} - \\ = &\quad (2n-1)X^{n+2} + [(2n-3) - 4n + 2] + X \end{aligned}$$

On en déduit que $P_n = (X^2-2x+1)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)X^k$.

2. *On a $Q_n(x) = x + 3x^2 + \ldots + (2n-1)x^n$. La fonction Q_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, avec $Q_n(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} Q_n(x) = +\infty$. Donc l'équation $Q_n(x) = 1$ admet une unique solution positive. Comme $Q_n(1) = n^2$, on a $0 \leqslant x_n \leqslant 1$.*

3. *On a* $Q_{n+1}(x_n) = Q_n(x_n) + (2n+1)x_n^{n+1} = 1 + (2n+1)x_n^{n+1} > 1 = Q_{n+1}(x_{n+1})$*. Donc, comme* Q_{n+1} *est croissante, la suite* (x_n) *est strictement décroissante. Comme elle est minorée par zéro, elle converge. Soit* $\ell = \lim_{n\to\infty} x_n$*. Pour* $x \in [0,1[$*, on a* $\lim_{n\to\infty}(2n-1)x^{n+2} = 0$ *et* $\lim_{n\to\infty}(2n+1)x^{n+1} = 0$*. Donc* $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)x^{n+2} - (2n+1)x^{n+1} + x^2 + x}{(x-1)^2} = \frac{x^2+x}{(x-1)^2}$*. On pose* $Q(x) = \frac{x^2+x}{(x-1)^2}$*.*

   On a $1 - Q(\ell) = Q_n(x_n) - Q(x_n) + Q(x_n) - Q(\ell)$*. Pour* $n \geqslant 2$*, on a* $0 \leqslant x_n \leqslant x_2 = \frac{\sqrt{13}-1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$*. D'après la continuité de la fonction* Q *sur* $[0,1[$ *on a* $\lim_{n\to\infty} Q(x_n) - Q(\ell) = 0$*.*

   Par ailleurs, $Q_n(x_n) - Q(x_n) = \frac{(2n-1)x_n^{n+2} - (2n+1)x_n^{n+1}}{(x_n-1)^2}$ *donc* $|Q_n(x_n) - Q(x_n)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{2n-1+2n+1}{(x_n-1)^2}$ *et comme* $\frac{1}{2} \leqslant 1 - x_n \leqslant 1$*, on a* $\frac{1}{(x_n-1)^2} \leqslant 4$ *(toujours pour* $n \geqslant 2$*). On en déduit que* $\lim_{n\to\infty} Q_n(x_n) - Q(x_n) = 0$*.*

   Finalement, $1 - Q(\ell) = 0$*, donc* $\ell^2 + \ell = \ell^2 - 2\ell + 1$ *d'où* $\ell = \frac{1}{3}$*.*

Références