Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Trouver $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que -1 soit racine triple de $P+1$ et que 1 soit racine triple de $P-1$.

Solution : *Soit P un polynôme répondant aux hypothèses de l'énoncé. Alors il existe $S = aX^2 + bX^2 + c \in \mathbb{R}_2[X]$ et $T = dX^2 + eX^2 + f \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que*

$$P = (X+1)^3 S - 1 = (X-1)^3 T + 1.$$

On développe ces expressions et on identifie les termes de même degré. On obtient le système :

$$\begin{cases} a & = d \\ 3a+b & = e-3d \\ 3a+3b+c & = f-3e+3d \\ a+3b+3c & = -3f+3e-d \\ b+3c & = 3f-e \\ c-1 & = -f+1 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $a = 3/8, b = -9/8, c = 1, d = 3/8, e = 9/8, f = 1$. On en déduit que $P = (x+1)^3(3/8x^2 - 9/8x + 1) - 1 = \boxed{3/8x^5 - 5/4x^3 + 15/8x}$. Réciproquement, on vérifie que ce polynôme est solution de notre problème.

Références