Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère le polynôme

$$P_n(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$$

Montrer qu'il n'a pas de racine multiple.

Solution : *Supposons que P_n admet une racine $\alpha \in \mathbb{C}$ d'ordre au moins deux. Alors $P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = 0$. Mais*

$$P_n(\alpha) = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!} \quad \text{et} \quad P_n'(\alpha) = 1 + \alpha + \frac{\alpha}{2!} + \cdots + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Donc par soustraction de ces deux égalités, on a $\frac{\alpha^n}{n!} = 0$ et forcément $\alpha = 0$. Mais $P_n(0) = 1$ et on aboutit à une contradiction.

Références