

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

6 avril 2023

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

On considère le polynôme : $P = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$.

1. Montrer que 3 est une racine double de P .
2. Factoriser P dans $\mathbb{R}$.
3. En déduire toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$.

Solution :

1. Comme $P(3) = P'(3) = 0$ et que $P''(3) \neq 0$, 3 est une racine double de P .
2. P est donc de la forme : $P = (X - 3)^2 (aX + bX + c)$. Par identification, on trouve :

$$P = (X - 3)^2 (X^2 + X + 1).$$

3. Les racines de $X^2 + X + 1$ sont les racines troisièmes de l'unité : $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ donc :

$$P = (X - 3)^2 \left(X - e^{\frac{2i\pi}{3}} \right) \left(X - e^{-\frac{2i\pi}{3}} \right)$$

et P comporte une racine double : 3 et deux racines simples complexes conjuguées : $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

Références