Équations trigonométriques

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Équations trigonométriques***

Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

1. $\cos(2x) + \cos(x) = -1$
2. $\cos^4 x + \sin^4 x = 1$
3. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = -1$

Solution :

1. *On utilise les formules de duplication :* $\cos(2x)+\cos(x) = -1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x = -1 \iff \cos x\,(2\cos x + 1) = 0 \iff \cos x = 0$ *ou* $\cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ *ou* $x = \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\ [2\pi] = \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$ *ou* $x = -\frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$.
2. *On utilise les linéarisations effectuées dans l'exercice* **??** *et on obtient :* $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 \iff \cos(4x) = 1 \iff 4x = 0\ [2\pi] \iff x = 0\,[\pi/2]$.
3. *On utilise les calculs de l'exercice* **??**. *On sait que* $\cos(2x) = \cos^2 x - 1$ *et que* $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$, *donc* $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = -1 \iff 2\cos^3 x + \cos^2 x - \cos x = 0 \iff \cos x\left(2\cos^2 x + \cos x - 1\right) = 0$. *Afin de résoudre* $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$, *on pose* $X = \cos x$ *et on cherche les racines de* $2X^2 + X - 1 = 0$ *qui sont* $1/2$ *et* -1. *Donc* $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ *si et seulement si* $\cos x = 1/2 \iff x = \pm\pi/3\ [2\pi]$ *ou* $\cos x = -1 \iff x = \pi\ [2\pi]$. *Finalement les solutions de l'équation initiale sont :* $x = \pi/2\ [\pi]$, $x = \pm\pi/3\ [2\pi]$ *et* $x = \pi\ [2\pi]$.

Références