Espaces préhilbertien

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

15 août 2022

1 Espaces préhilbertien

Introduction au groupe orthogonal
Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Pour bien aborder ce chapitre

On va généraliser dans ce chapitre la notion de produit scalaire étudiée dans les chapitres **??** et **??** aux espaces vectoriels. Cela permettra d'étendre la notion de vecteurs orthogonaux et les notions afférentes (norme, base orthonormale, théorème de Pythagore, projections et symétries orthogonales...) à certains espaces vectoriels de fonctions ou de matrices par exemple. Un des prolongements importants de ce chapitre sera celui consacré aux séries de Fourier en seconde année et qui formera un magnifique exemple d'illustration de la puissance de l'algèbre mise au service de l'analyse.

Nous étudierons dans la seconde moitié de ce chapitre les endomorphismes d'un espace euclidien qui préservent le produit scalaire, ou autrement dit les isométries. Nous verrons que les isométries d'un espace euclidien E donné forment un groupe appelé groupe orthogonal et nous étudierons complètement ce groupe dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$ et $E = \mathbb{R}^3$. Nous ferons le lien entre les matrices et ces endomorphismes remarquables et nous introduirons la notion de matrice orthogonale.

1.1 Définitions et règles de calcul

1.1.1 Produit scalaire

DÉFINITION 0.1 **Produit scalaire**
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle *produit scalaire* sur E, une application : $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1. φ est une *forme bilinéaire* : $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \varphi(x, z) + \mu \varphi(y, z), \varphi(x, \lambda y + \mu z) \quad = \lambda \varphi(x, y) + \mu \varphi(y, z).$$

2. φ est *symétrique* :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

3. φ est *définie* :

$$\forall x \in E, \quad (\varphi(x, x) = 0) \Longleftrightarrow (x = 0).$$

4. φ est *positive* :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) \geqslant 0.$$

Notation 0.1 On note $(x \mid y) = \varphi(x, y)$ le produit scalaire. En géométrie, on utilise également la notation $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y}$.

DÉFINITION 0.2 **Espace préhilbertien, Espace euclidien**
Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé un *espace préhilbertien réel*. Si de plus E est de dimension finie, on dit que E est un *espace euclidien*.

1.1.2 Norme

Dans toute la suite, on considère un préhilbertien réel $(E, (\cdot \mid \cdot))$.

DÉFINITION 0.3 **Norme euclidienne associée à un produit scalaire**
On définit la *norme euclidienne* associée à un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ par :

$$\forall x \in E, \quad \boxed{\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}}.$$

Remarque 0.1 $\|\cdot\|$ est bien définie car $(\cdot \mid \cdot)$ est une forme bilinéaire positive et donc pour tout vecteur $x \in E$, $(x \mid x) \geqslant 0$.

THÉORÈME 0.1 **Règles de calcul**
Pour tous vecteurs $x, y \in E$, et tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\|\lambda.x\| = |\lambda| \; \|x\|$;
2. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,(x \mid y) + \|y\|^2$;
3. $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\,(x \mid y) + \|y\|^2$;
4. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

(*égalité du parallélogramme*) ;

5. $(x \mid y) = \dfrac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$
(*identité de polarisation*).

Pour des vecteurs $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in E$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j \left(x_i \mid y_j \right),$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \lambda_i \lambda_j \left(x_i \mid x_j \right).$$

Démonstration *Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. En utilisant le fait que $(\cdot \mid \cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique :*

1. $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x \mid \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 \, (x \mid x)} = |\lambda| \, \|x\|$.
2. $\|x + y\|^2 = (x + y \mid x + y) = (x \mid x) + 2\,(x \mid y) + (y \mid y) = \|x\|^2 + 2\,(x \mid y) + \|y\|^2$.
3. $\|x - y\|^2 = (x - y \mid x - y) = (x \mid x) - 2\,(x \mid y) + (y \mid y) = \|x\|^2 - 2\,(x \mid y) + \|y\|^2$;
4. *En additionnant les deux égalités précédentes, on obtient l'égalité du parallélogramme.*
5. *Enfin, par soustraction de ces deux mêmes égalités, on obtient l'identité de polarisation.*

Les deux dernières formules sont conséquence de la bilinéarité du produit scalaire.

THÉORÈME 0.2 **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
Pour tous vecteurs $x, y \in E$, on a *l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$\boxed{|(x \mid y)| \leqslant \|x\| \|y\|}$$

et on a égalité si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires : $|(x \mid y)| = \|x\| \|y\| \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \quad (y = \lambda x \quad \text{ou} \quad x = \lambda y)$.

Démonstration *Soient $x, y \in E$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, considérons :*

$$P(\lambda) = (x + \lambda y \mid x + \lambda y).$$

D'après les règles de calcul précédentes, on obtient

$$P(\lambda) = (y \mid y)\, \lambda^2 + 2\,(x \mid y)\, \lambda + (x \mid x) = \|y\|^2 \lambda^2 + 2\lambda\,(x \mid y) + \|x\|^2$$

et P est un trinôme du second degré en λ. Par ailleurs $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad P(\lambda) \geqslant 0$. Donc P admet au plus une racine réel et son discriminant réduit est négatif ou nul, ce qui s'écrit : $((x \mid y))^2 - \|y\|^2 \|x\|^2 \leqslant 0$, c'est-à-dire $|(x \mid y)| \leqslant \|x\| \; \|y\|$.
Si x et y sont colinéaires, on vérifie facilement que $|(x \mid y)| = \|x\| \|y\|$. Réciproquement, si cette égalité est vraie, alors le discriminant de P est nul et donc P admet une racine double $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. On a donc $(x + \lambda_0 y \mid x + \lambda_0 y) = 0$ ce qui n'est possible que si $x + \lambda_0 y = 0$ c'est-à-dire que si $x = \lambda_0 y$.

THÉORÈME 0.3 **Inégalité de Minkowski**
Pour tous vecteurs $x, y \in E$, on a *l'inégalité de Minkowski*

$$\boxed{\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leqslant \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|}$$

et on a égalité dans la majoration de droite si et seulement si les deux vecteurs x et y se trouvent sur une même demi-droite issue de l'origine : $\exists \lambda \geqslant 0 : \quad y = \lambda x$.

Démonstration *Soient $x, y \in E$.*

- *On applique les régles de calcul avec le produit scalaire 0.1 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz 0.2 :*

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = & \quad \|x\|^2 + 2\,(x \mid y) + \|y\|^2 \\ \leqslant & \quad \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

  On a donc : $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

- *Si x et y se trouvent sur une même demi-droite issue de l'origine, on vérifie facilement que cette dernière inégalité est une égalité. Réciproquement, supposons que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Alors, en reprenant le calcul précédent, on obtient $(x \mid y) = \|x\|\,\|y\|$ et on est dans le cas d'égalité de la la formule de Cauchy-Schwarz. Donc x et y sont colinéaires : $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad y = \alpha x$. On injecte cette égalité dans celle de départ, on trouve $(1+\alpha)\,x = \|x\| + \|\alpha x\|$, c'est-à-dire : $(1+\alpha)\,x = (1+|\alpha|)\,\|x\|$. Si le vecteur x est nul alors il en est de même de y et la propriété est prouvée. Si x est non nul alors $\alpha = |\alpha|$ et α est bien positif.*

- *Par ailleurs :*

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leqslant \|x-y\| + \|y\|$$

  et

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leqslant \|y-x\| + \|x\|$$

  et comme $\|y-x\| = \|x-y\|$, on obtient : $\|x-y\| \geqslant \|x\| - \|y\|$ et $\|x-y\| \geqslant \|y\| - \|x\|$, ce qui s'écrit aussi : $\|x-y\| \geqslant \Big|\|x\| - \|y\|\Big|$.

De manière plus générale :

DÉFINITION 0.4 **Norme**

On appelle norme sur E une application : $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.
2. $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.
3. $\forall x, y \in E, \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (*Inégalité triangulaire*).

PROPOSITION 0.4 **Norme associée au produit scalaire**

La norme euclidienne $\|\cdot\|$ associée à un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ sur E est une norme sur E.

Démonstration *Les propriétés 2 et 3 ont déjà été prouvées dans les théorèmes 0.1 et 0.3. Démontrons la première. Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 0$ alors $(x \mid x) = 0$ mais comme $(\cdot \mid \cdot)$ est une forme bilinéaire définie, $x = 0$.*

Exemple 0.2 Quelques exemples de produits scalaires et leur norme associée (à retenir) :

- Produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$: Si $X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(X \mid Y) = x_1 y_1 + \dots x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

— Sur l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}),\ f, g \in E$:

$$(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)dt,$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b (f(t))^2\, dt}.$$

— Sur l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues et 2π-périodiques, $E = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}),\ f, g \in E$:

$$(f \mid g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt,$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} (f(t))^2\, dt}.$$

— Sur l'espace des matrices carrées $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

$$< A, B >= \mathrm{Tr}(AB^{\mathrm{T}}),$$

$$\|A\| = \sqrt{< A, A >} = \sqrt{\mathrm{Tr}(AA^{\mathrm{T}})}.$$

Voir l'exercice **??** page **??**.

Définition 0.5 **Vecteur unitaire**
Soit x un vecteur d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'une norme $\|\cdot\|$. On dit que x est *unitaire* si et seulement si $\|x\| = 1$.

1.2 Orthogonalité

On considère dans ce paragraphe un espace préhilbertien réel $(E, (. \mid .))$.

Définition 0.6 **Vecteurs orthogonaux**
Deux vecteurs x et y de E sont dits *orthogonaux* lorsque $(x \mid y) = 0$.

Théorème 0.5 **Identité de Pythagore**
Soient x et y deux vecteurs de E. Alors

$$(x \mid y) = 0 \Longleftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration *D'après la formule 0.1 :*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,(x \mid y) + \|y\|^2\,,$$

et il vient immédiatement :

$$(x \mid y) = 0 \Longleftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

THÉORÈME 0.6 **Des vecteurs orthogonaux 2 à 2 forment un système libre**
Soit $S = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs non-nuls deux à deux orthogonaux :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Rightarrow (x_i \mid x_j) = 0.$$

Alors la famille S est libre.

Démonstration *Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Du fait de la bilinéarité du produit scalaire et que les vecteurs de cette famille sont deux à deux orthogonaux :*

$$0 = \left(x_i \mid \sum_{j=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i\,(x_i \mid x_j) = \alpha_i\,(x_i \mid x_i)$$

Comme $x_i \neq 0$, $(x_i \mid x_i) \neq 0$ et il vient que $\alpha_i = 0$. Cette égalité est vraie pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. On montre ainsi que la famille S est libre.

DÉFINITION 0.7 **Sous-espaces orthogonaux**
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'ils sont orthogonaux si et seulement si

$$\forall x \in F, \forall y \in G, \quad (x \mid y) = 0.$$

DÉFINITION 0.8 **Orthogonal d'une partie**
Soit $A \subset E$ une partie de E. On définit l'orthogonal de A comme étant le sous-ensemble de E noté $A^\perp$ et donné par :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, (x \mid a) = 0\}$$

THÉORÈME 0.7 **Propriétés de l'orthogonal**
Soient $A, B \subset E$ deux parties de E.

1. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
3. $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$.
4. $A \subset \left(A^\perp\right)^\perp$.

Démonstration

1. *Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de A donc $0 \in A^\perp$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in A^\perp$ et $a \in A$. Alors $(\alpha x + \beta y \mid a) = \alpha\,(x \mid a) + \beta\,(y \mid a) = 0$ donc $\alpha x + \beta y \in A^\perp$. $A^\perp$ est donc bien un sous-espace vectoriel de E.*

2. *Supposons que $A \subset B$. Soit $x \in B^{\perp}$. Montrons que $x \in A^{\perp}$. Soit $a \in A$. Comme $A \subset B$, $a \in B$ et $(x \mid a) = 0$. Donc $x \in A^{\perp}$.*
3. *On a $A \subset \operatorname{Vect}(A)$ donc d'après la propriété précédente : $(\operatorname{Vect}(A))^{\perp} \subset A^{\perp}$. Réciproquement, si $x \in A^{\perp}$ et si $y \in Vect\,(A)$ montrons que $(x \mid y) = 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ et $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que : $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$ et*

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, (x \mid a_i) = 0$$

car $x \in A^{\perp}$. Voilà qui termine la démonstration du troisième point.

4. *Enfin, si $a \in A$ et si $x \in A^{\perp}$ alors $(a \mid x) = 0$ et donc $a \in \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$ ce qui prouve la dernière inclusion.*

1.3 Espaces euclidiens

On considère dans toute la suite de ce chapitre un espace euclidien E muni d'un produit scalaire noté $(. \mid .)$ et $\|.\|$ la norme euclidienne associée. On note n la dimension de E.

1.3.1 Bases orthogonales, orthonormales

DÉFINITION 0.9 **Bases orthogonales, orthonormales**
Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On dit que e est une base

1. *orthogonale* si et seulement si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Rightarrow (e_i \mid e_j) = 0.$$
2. *orthonormale* si et seulement si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux et unitaires, c'est-à-dire si et seulement si :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (e_i \mid e_j) = \delta_{ij}.$$

Remarque 0.2 Si on se donne un système $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs deux à deux orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien de dimension n alors d'après la proposition 0.6, ce système est libre. Comme il est libre de rang maximal c'est une base (orthogonale) de E.

Remarque 0.3 La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale pour le produit scalaire usuel.

THÉORÈME 0.8 **Calculs dans une base orthonormale**
Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.

1. Les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale sont données par les produits scalaires :
$$\boxed{x = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)\, e_i}.$$

2. Si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ et $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, alors

$$\boxed{(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n}.$$

3. Si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$,

$$\boxed{\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Démonstration *Ces formules se prouvent facilement en utilisant les règles de calcul avec le produit scalaire 0.1 et le fait que :* $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (e_i \mid e_j) = \delta_{ij}$.

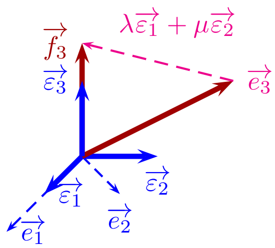
1.3.2 Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Erhard Schmidt, né le 13 janvier 1876 à Dorpat (Estonie), mort le 06 décembre 1959 à Berlin)

 *Mathématicien allemand. Il fait ses études, comme c'est souvent le cas à l'époque en Allemagne, dans différentes universités allemandes et les termine à Berlin. Il soutient sa thèse en 1905 sous la direction de David Hilbert. Elle porte sur les équations intégrales. Après avoir enseigné successivement dans les universités de Bonn, Zurich, Erlangen et Breslau, il est nommé en 1917 comme professeur à l'Université de Berlin où il occupe le poste laissé vacant par Schwarz. Dans les années 1930, il subit la montée du nazisme et alors que ses collègues juifs (Schur, von Mises) doivent quitter l'Université, il est sommé de prendre des résolutions contre les juifs. Il s'acquitte de cette tâche avec si peu de zèle que les nazis diront de lui à l'époque qu'« il ne comprend pas le problème juif »et qu'il ne sera pas critiqué par la suite. Erhard Schmidt est un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle. Il a beaucoup contribué à la théorie des espaces de Hilbert que vous découvrirez en spé et a simplifié et généralisé un certain nombre de résultats d'Hilbert. C'est dans un article de 1907 sur les équations intégrales qu'il expose le procédé d'orthonormalisation. Notons que ce procédé avait été découvert au préalable par Laplace mais c'est Schmidt qui su en donner le premier un exposé clair.*

THÉORÈME 0.9 **Théorème de Schmidt**
Soit E un espace euclidien de dimension n et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base quelconque de E. Alors il existe une $\boxed{\textit{base orthonormale}}$ $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E vérifiant :

1. $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \varepsilon_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$; 2. $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad (e_i \mid \varepsilon_i) > 0$.



Démonstration *On va mettre en place un algorithme permettant de construire la base ε.*

— $\boxed{\textit{Au rang } 1}$ *: Comme e est une base, e_1 est non nul et le vecteur $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ est unitaire et vérifie $Vect\,(\mathrm{e}_1) = Vect\,(\varepsilon_1)$ ainsi que $(e_1 \mid \varepsilon_1) = \|e_1\| > 0$.*

— $\boxed{\textit{Au rang } k}$ *Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Supposons les vecteurs $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ construits tels que :*

  — *La famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ est orthonormale ;*
  — $\forall i \in [\![1, k]\!], \quad \varepsilon_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$;
  — $\forall i \in [\![1, k]\!], \quad (e_i \mid \varepsilon_i) > 0$.

— $\boxed{\textit{Au rang } k+1}$ *Construisons un vecteur ε_{k+1} répondant au problème. Les conditions qu'il doit remplir (voir la figure* **??***) nous invitent à le chercher sous la forme $\varepsilon_{k+1} = \alpha_1\varepsilon_1 + \cdots + \alpha_k\varepsilon_k + e_{k+1}$ où : $\forall i \in [\![1, k]\!], \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on a la série d'équivalences :*

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i \perp \varepsilon_{k+1} \iff & \quad (\varepsilon_i \mid \varepsilon_{k+1}) = 0 \\
\iff & \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\,(\varepsilon_i \mid \varepsilon_j) + (\varepsilon_i \mid \mathrm{e}_{k+1}) = 0 \\
\iff & \quad \alpha_i\,\|\varepsilon_i\|^2 + (\varepsilon_i \mid \mathrm{e}_{k+1}) = 0 \iff \quad \alpha_i = -\,(\varepsilon_i \mid \mathrm{e}_{k+1})
\end{aligned}$$

car $\|\varepsilon_i\| = 1$. On considère alors le vecteur $\widetilde{\varepsilon}_{k+1}$ donné par

$$\widetilde{\varepsilon}_{k+1} = \mathrm{e}_{k+1} - \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i \mid \mathrm{e}_{k+1})\,\varepsilon_i.$$

et soit $\varepsilon_{k+1} = \dfrac{\widetilde{\varepsilon}_{k+1}}{\|\widetilde{\varepsilon}_{k+1}\|}$ Par construction, les vecteurs du système $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k+1})$ sont deux à deux orthogonaux et unitaires. Cette famille est donc orthonormale. De plus, pour tout $i \in [\![1, k]\!], \quad Vect\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i) = Vect\,(e_1, \ldots, e_i)$ et il est clair que $Vect\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k+1}) = Vect\,(e_1, \ldots, e_{k+1})$. Enfin, quitte à considérer $-\varepsilon_{k+1}$ plutôt que ε_{k+1}, on peut supposer que $(e_{k+1} \mid \varepsilon_{k+1}) > 0$.

— $\boxed{\textit{Au rang } n}$ *En appliquant cet algorithme jusqu'au rang n, on construit la famille ε proposée.*

Remarque 0.4 L'algorithme de construction de la base orthonormale est aussi important que l'énoncé du théorème.

Remarque 0.5 La matrice de passage de e vers ε est triangulaire supérieure.

PLAN 0.1 : $\boxed{\text{Pour orthonormaliser une famille de vecteurs}}$
On souhaite appliquer l'algorithme de Schmidt à la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Pour ce faire :

1. *On pose* $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$.
2. *On suppose* $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ *construits. On calcule le vecteur :* $\boxed{\widetilde{\varepsilon}_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i \mid \mathrm{e}_{k+1})\, \varepsilon_i}$

   et on pose : $\boxed{\varepsilon_{k+1} = \dfrac{\widetilde{\varepsilon}_{k+1}}{\|\widetilde{\varepsilon}_{k+1}\|}}$.
3. *Si* $(e_{k+1} \mid \varepsilon_{k+1}) < 0$ *alors on remplace* ε_{k+1} *par* $-\varepsilon_{k+1}$.

Remarque 0.6

— La troisième étape du procédé d'orthonormalisation est facultative. Si on ne l'effectue pas, la base construite est encore orthonormale.

— On peut aussi ne pas normaliser le vecteur $\widetilde{\varepsilon}_i$ dans la deuxième étape de l'algorithme. Dans ce cas la base construire n'est pas orthonormale mais orthogonale et la formule donnant ε_{k+1} en fonction de e_{k+1}, ε_1,...,ε_k est légérement changée (exercice !).

Remarque 0.7 La matrice de passage de e vers ε est triangulaire supérieure.

Exemple 0.3 Soit l'espace $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soient les vecteurs $e_1 = (2, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 1)$ et $e_3 = (0, 1, 2)$. Construisons une base orthonormale à partir de $e = (e_1, e_2, e_3)$. D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt :

1. On pose $\boxed{\varepsilon_1 = (1, 0, 0)}$.
2. On a $\widetilde{\varepsilon}_2 = e_2 - (\varepsilon_1 \mid e_2)\, \varepsilon_1 = (0, 1, 1)$ donc $\boxed{\varepsilon_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 0)}$.
3. De même $\widetilde{\varepsilon}_3 = e_3 - (\varepsilon_1 \mid e_3)\, \varepsilon_1 - (\varepsilon_2 \mid e_3)\, \varepsilon_2 = \left(0, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ donc $\boxed{\varepsilon_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(0, -1, 1)}$.

La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base orthonormale de E.

```
> with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
> e1 := vector([1,0,0]);
                                e1 := [1, 0, 0]
> e2 := vector([1,1,1]);
                                e2 := [1, 1, 1]
> e3 := vector([0,1,2]);
                                e3 := [0, 1, 2]
> GramSchmidt([e1,e2,e3],normalized);
```

```
[          [   1  (1/2)  1  (1/2)]  [     1  (1/2)  1  (1/2)]]
[[1, 0, 0], [0, - 2     , - 2    ], [0, - - 2     , - 2     ]]
[          [   2        2       ]  [     2        2       ]]
```

1.3.3 Conséquences

COROLLAIRE 0.10 **Théorème de la base orthonormale incomplète**
Toute famille orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ d'un espace euclidien $E \neq \{0_E\}$ de dimension n $(p \leqslant n)$ peut être complétée par des vecteurs $\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n$ de E en sorte que la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ soit une base orthonormale de E.

Démonstration *En appliquant le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille orthonormale (et donc libre)* $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ *par des vecteurs* $e_{k+1}, \dots, e_n$ *en une base* $e = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ *de* E*. On applique le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à cette base , on peut construire des vecteurs* $\varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n$ *de* E *tels que la famille* $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ *soit orthonormale et tel que* $Vect\,(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = Vect\,(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, e_{k+1}, \dots, e_n) = E$*. Cette famille est donc libre et génératrice et forme une base orthonormale de* E*.*

COROLLAIRE 0.11 **Existence d'une base orthonormale**
Tout espace euclidien $E \neq \{0_E\}$ possède une base orthonormale.

Démonstration *Soit* e *une base de* E*. En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à cette famille, on construit une famille orthonormale* ε *telle que* $Vect\,(\varepsilon) = Vect\,(e) = E$*. Cette famille est donc libre et génératrice. Elle forme une base orthonormale de* E*.*

THÉORÈME 0.12 **Propriétés de l'orthogonal en dimension finie**
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p de E. Alors

1. $\boxed{E = F \oplus F^\perp}$;
2. $\dim F^\perp = n - p$;
3. $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

Démonstration *Montrons que* F *et* $F^\perp$ *sont supplémentaires dans* E*.*

— *On a :* $F \cap F^\perp = \{0\}$*. En effet, si un vecteur* x *est à la fois dans* F *et dans l'orthognal de* F*, il vérifie* $(x \mid x) = 0$ *et donc* $x = 0$*.*

— *Montrons maitenant que* $E = F + F^\perp$*. Comme* F *est de dimension* p*, par application du théorème précédent, on peut trouver une base orthonormale* $(e_1, \dots, e_p)$ *de* F*. Soit* $x \in E$ *et soit* $x' = \sum_{k=1}^{p} (x \mid e_k)\, e_k$*. On vérifie facilement que* $x' \in F$ *et que* $x - x' \in F^\perp$*. Donc* $x = x + (x - x') \in F + F^\perp$ *et on a bien* $E = F + F^\perp$*.*

Ainsi : $E = F \oplus F^\perp$*. D'après le théorème* **??***, on obtient* $\dim F + \dim F^\perp = n$ *qui entraîne la seconde égalité du théorème. Enfin, on a prouvé dans la proposition 0.7 que* $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$*. Mais comme* $\dim \left(F^\perp\right)^\perp = n - \dim F^\perp = n - (n - \dim F) = \dim F$*, on peut affirmer que* $\left(F^\perp\right)^\perp = F$*.*

Remarque 0.8 Un sous-espace vectoriel F d'un espace E de dimension finie possède, en général, une infinité de supplémentaires. Si E est un espace euclidien, F n'admet qu'un et un seul supplémentaire orthogonal : $F^{\perp}$. Pour cette raison, on dira que $F^{\perp}$ est $\boxed{\text{le}}$ supplémentaire orthogonal de F dans E.

THÉORÈME 0.13 **Théorème de Riesz**
Soit E un espace euclidien et soit $f \in E^{\star}$ une forme linéaire. Alors il existe un unique vecteur $z_f \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \quad f(x) = (z_f \mid x)$$

Démonstration *Pour tout $z \in E$, posons :*

$$\varphi_z : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (z \mid x) \end{array} \right. .$$

Pour tout $z \in E$, φ_z est une forme linéaire. En effet, fixons $z \in E$. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $x, y \in E$: $\varphi_z(\alpha x + \beta y) = (z \mid \alpha x + \beta y) = \alpha (z \mid x) + \beta (z \mid y) = \alpha \varphi_z(x) + \beta \varphi_z(y)$. L'application Φ donnée par

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* z \\ \longmapsto & \varphi_z & \end{array} \right.$$

est alors bien définie. Montrons que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

— $\boxed{\Phi \text{ est linéaire :}}$ *si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in E$ alors $\Phi(\alpha x + \beta y) = \varphi_{\alpha x + \beta y} = (\alpha x + \beta y \mid \cdot) = \alpha (x \mid \cdot) + \beta (y \mid \cdot) = \alpha \varphi_x + \beta \varphi_y = \alpha \Phi(x) + \beta \Phi(y)$.*

— $\boxed{\Phi \text{ est injective :}}$ *soit $x \in E$ tel que $\Phi(x) = 0$. Alors : $\forall y \in E, \quad (x \mid y) = 0$, et en particulier $(x \mid x) = 0$ ce qui n'est possible, par définition du produit scalaire que si $x = 0$.*

— $\boxed{\Phi \text{ est surjective :}}$ *comme $\dim E = \dim E^*$ (voir l'exercice **??** page **??**), d'après le théorème de caractérisation des isomorphismes **??**, sachant que Φ est injective, il vient que Φ est aussi surjective.*

Toute forme linéaire $f \in E^*$ sur E est donc image d'un vecteur z de E par Φ. Posons $z_f = z$. On a alors : $f = \Phi(z_f) = (z_f \mid \cdot)$ et le théorème est prouvé.

Remarque 0.9 Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, si l'on considère un hyperplan H d'équation :

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

Alors cet hyperplan est orthogonal au vecteur $n = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$: $H = \{n\}^{\perp}$.

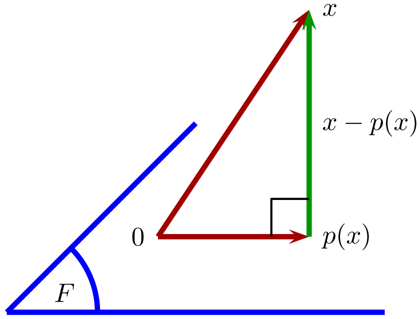
1.4 Projecteurs et symétries orthogonaux

1.4.1 Projecteurs orthogonaux

DÉFINITION 0.10 **Projecteur orthogonal**
Soit $p \in L(E)$ un projecteur (c'est-à-dire une endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$). On dit que p est un *projecteur orthogonal* si et seulement si $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont deux sous-espaces orthogonaux de E :

$$\forall x \in \operatorname{Ker} p, \ \forall y \in \operatorname{Im} p, \quad (x \mid y) = 0$$

Remarque 0.10 Soit p un projecteur orthogonal et soit $x \in E$. Alors $(p(x) \mid x - p(x)) = 0$. En effet $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} f^{\perp}$



Théorème 0.14 Calcul du projeté orthogonal
Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit $x \in E$. On suppose que

1. $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une base orthonormale de F

alors le projeté orthogonal $p(x)$ du vecteur x sur le sous-espace F vaut :

$$\boxed{p(x) = \sum_{i=1}^{p} (x \mid \varepsilon_i) . \varepsilon_i}.$$

Démonstration *D'après le théorème 0.8 appliqué à $p(x) \in F$ et à la base orthonormale ε de F donnée :*

$$\begin{aligned} p(x) = & \sum_{i=1}^{p} (p(x) \mid \varepsilon_i) \varepsilon_i \\ = & \sum_{i=1}^{p} (x \mid \varepsilon_i) \varepsilon_i - \sum_{i=1}^{p} (x - p(x) \mid \varepsilon_i) \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{p} (x \mid \varepsilon_i) \varepsilon_i \end{aligned}$$

car $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p = F^{\perp}$ et donc :

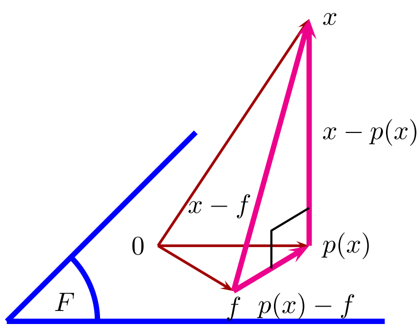
$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad (x - p(x) \mid \varepsilon_i) = 0.$$

Théorème 0.15 Le projeté $p(x)$ réalise la meilleure approximation de x par des vecteurs de F
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Pour tout $x \in E$, on pose :

$$d(x, F) = \inf_{f \in F} \|x - f\|.$$

Alors :

1. $d(x, F)$ est bien défini ;
2. $d(x, F) = \|x - p(x)\|$ où $p(x)$ est la projection orthogonale de x sur F ;
3. Si $f \in F$, $\|x - f\| \geqslant \|x - p(x)\|$ avec égalité si et seulement si $f = p(x)$.



Démonstration

1. *Soit $x \in F$. Notons $\mathscr{F} = \{\|x-f\| \mid f \in F\}$. $\mathscr{F}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0. Elle possède donc une borne inférieure et $d(x,F)$ est bien défini.*
2. *D'après le théorème de Pythagore 0.5, pour tout $f \in F$:*

$$\|x-f\|^2 = \|x-p(x)\|^2 + \|p(x)-f\|^2 \geqslant \|x-p(x)\|^2.$$

Donc $\|x-p(x)\|$ est un minorant de $\mathscr{F}$. Mais comme $p(x) \in F$, $\|x-p(x)\| \in \mathscr{F}$ et est donc la borne inférieure de $\mathscr{F}$. Il vient alors : $d(x,F) = \|x-p(x)\|$.

3. *On a de plus montré que si $f \in F$, alors $\|x-f\| \geqslant \|x-p(x)\|$ et on a égalité si et seulement si $f = p(x)$.*

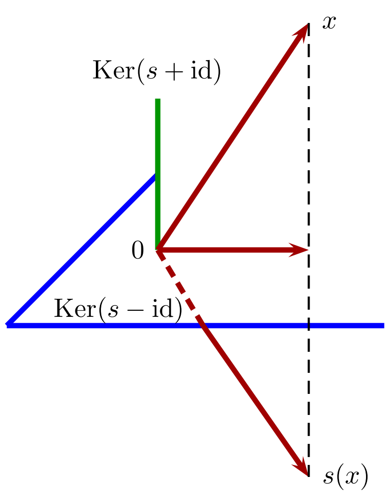
1.4.2 Symétries orthogonales, réflexions

DÉFINITION 0.11 **Symétrie orthogonale, réflexion**

Soit $s \in L(E)$ une symétrie vectorielle (c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $s \circ s = \mathrm{id}$).

— On dit que s est une symétrie orthogonale si et seulement si les deux sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$ sont orthogonaux.

— On dit de plus que s est une *réflexion* si l'ensemble des vecteurs invariants de s, $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id})$ est un hyperplan de E.



1.5 Endomorphismes orthogonaux, matrices orthogonales

1.5.1 Endomorphismes orthogonaux

On considère dans toute la suite un espace euclidien E muni d'un produit scalaire noté $(. \mid .)$ et $\|.\|$ la norme euclidienne associée. On note n la dimension de E.

DÉFINITION 0.12 **Endomorphismes orthogonaux**
Soit $u \in L(E)$. On dit que u est un *endomorphisme orthogonal* (ou *une isométrie*) si

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

On note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

THÉORÈME 0.16 **Un endomorphisme orthogonal conserve le produit scalaire**
On a l'équivalence :

$$u \in \mathrm{O}(E) \Longleftrightarrow \forall (x,y) \in E^2, \quad (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)\,.$$

Démonstration

— *Supposons que u est un endomorphisme orthogonal de E. D'après l'identité de polarisation 0.1, pour tout $(x,y) \in E^2$:*

$$\begin{aligned}(u(x) \mid u(y)) &= \frac{1}{4}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = (x \mid y)\,.\end{aligned}$$

— *Supposons que u préserve le produit scalaire alors pour tout $x \in E$:*

$$\|u(x)\| = \sqrt{(u(x) \mid u(x))} = \sqrt{(x \mid x)} = \|x\|$$

et donc $u \in \mathrm{O}(E)$.

PROPOSITION 0.17 **Les endomorphismes orthogonaux sont des automorphismes**
Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ un endomorphisme orthogonal de E alors u est un automorphisme de E et $u^{-1} \in \mathrm{O}(E)$.

Démonstration *Soit $x \in \operatorname{Ker} u$ alors*

$$\|x\| = \|u(x)\| = 0$$

*et d'après les propriétés de la norme 0.4, on peut affirmer que $x = 0$. Donc $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ et u est injectif. D'après la caractérisation des automorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie (corollaire **??** page **??**), u est un automorphisme de E. Enfin, considérons $x \in E$ et notons $y = u(x)$. u étant un endomorphisme orthogonal de E, on a $\|x\| = \|y\|$. Donc, comme $u^{-1}(y) = x$, il vient que $\left\|u^{-1}(y)\right\| = \|x\| = \|y\|$ et u^{-1} est bien lui aussi un endomorphisme orthonal de E.*

THÉORÈME 0.18 **Groupe orthogonal**
$(\mathrm{O}(E), \circ)$ est un sous-groupe du groupe linéaire $(GL\,(E)\,, \circ)$. On l'appelle le *groupe orthogonal* de E.

Démonstration *$\mathrm{O}(E)$ est un sous-ensemble non vide de $\mathrm{GL}(E)$ car il contient id_E. D'après le théorème **??**, il suffit de prouver que pour tout $u, v \in \mathrm{O}(E)$, $u \circ v^{-1} \in \mathrm{O}(E)$. Mais d'après la proposition précédente, v^{-1} est aussi une isométrie de E et pour tout $x \in E$, on a :*

$$\left\|u \circ v^{-1}\,(x)\right\| = \left\|u\left(v^{-1}\,(x)\right)\right\| = \left\|v^{-1}\,(x)\right\| = \|x\|$$

ce qui prouve que $u \circ v^{-1} \in \mathrm{O}(E)$. Le couple $(\mathrm{O}(E), \circ)$ est donc un sous-groupe de $(GL\,(E)\,, \circ)$.

PROPOSITION 0.19 **Une caractérisation pratique des automorphismes orthogonaux**
Soit $u \in \mathfrak{L}\,(E)$ et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. On a équivalence entre :

1. $u \in \mathrm{O}(E)$,
2. $(u\,(e_1)\,, \dots, u\,(e_n))$ est encore une base orthonormale de E.

Démonstration

— *Si $u \in \mathrm{O}(E)$, d'après la proposition 0.16, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$:*

$$(u\,(e_i) \mid u\,(e_j)) = (e_i \mid e_j) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

ce qui prouve que la famille $(u\,(e_1)\,, \dots, u\,(e_n))$ est une base orthonormale de E.

— *Si l'image par u de la base orthonormale $e = (e_1, \dots, e_n)$ est encore orthonomale alors pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ et par bilinéarité du produit scalaire :*

$$\begin{aligned} \|u\,(x)\|^2 &= (u\,(x) \mid u\,(x)) \\ &= \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} x_i x_j\,(u\,(e_i) \mid u\,(e_j)) \\ &= \sum_{i \in [\![1,n]\!]} x_i^2\,(u\,(e_i) \mid u\,(e_i)) \\ &= \sum_{i \in [\![1,n]\!]} x_i^2 = \|x\|^2. \end{aligned}$$

Donc $u \in \mathrm{O}(E)$.

1.5.2 Matrices orthogonales

DÉFINITION 0.13 **Matrices orthogonales**
On dit qu'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si et seulement si :

$$A^{\mathrm{T}} A = I_n.$$

On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Remarque 0.11 Une matrice orthogonale est inversible et

$$A^{-1} = A^{\mathrm{T}}.$$

Ce qui montre qu'elle vérifie également

$$AA^{\mathrm{T}} = I_n.$$

THÉORÈME 0.20 **Caractérisation pratique des matrices orthogonales**
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est une matrice orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes $(C_1, \dots, C_n)$ forment une base orthonormale pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire :

$$\forall (p,q) \in [\![1,n]\!]^2, \quad p \neq q \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ip} a_{iq} = 0 \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1.$$

Démonstration *Ces formules sont une conséquence directe de la définition du produit matriciel et de l'égalité :* $AA^{\mathrm{T}} = I_n$

THÉORÈME 0.21 **La matrice d'une isométrie dans une base orthonormale est orthogonale**
On considère une **base orthonormale** $e = (e_1, \dots, e_n)$ d'un espace euclidien E, et un endomorphisme $u \in L(E)$. Notons $A = \mathrm{Mat}_e(u)$. On a équivalence entre :

1. u est un automorphisme orthogonal.
2. A est une matrice orthogonale.

Démonstration *Notons* $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. *Par bilinéarité du produit scalaire, il vient, pour tout* $i, j \in [\![1,n]\!]$ *:*

$$(u(e_i) \mid u(e_j)) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{k'=1}^{n} a_{ki} a_{k'j} \left(e_k \mid e'_k\right)$$

et donc, comme e *est orthonormale :*

$$(u(e_i) \mid u(e_j)) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} \quad (\star).$$

— *Supposons que* $u \in L(E)$ *est une isométrie de* E. *Alors, comme les isométries conservent le produit scalaire, l'égalité* $(\star)$ *devient, pour tout* $i, j \in [\![1,n]\!]$ *:*

$$\delta_{i,j} = (e_i \mid e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$$

et donc, d'après 0.20, A *est orthogonale.*

— *Réciproquement, si A est orthogonale alors en utilisant à nouveau $(\star)$ et la proposition 0.20, on trouve, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$:*

$$(u(e_i) \mid u(e_j)) = \quad (e_i \mid e_j)$$

et donc la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormale de E. On applique alors la proposition 0.19 et u est un automorphisme orthogonal.

Remarque 0.12 Le résultat précédent est faux si la base ε n'est pas orthonormale.

THÉORÈME 0.22 **Caractérisation des matrices de passage entre bases orthonormales**
Soit e une base orthonormale de E et f une base de E. Soit $P = P_{e \to f}$ la matrice de passage entre ces deux bases. On a équivalence entre :

1. f est une base orthonormale.
2. P est une matrice orthogonale.

Démonstration

— *Supposons que f est orthonormale. Soit u l'endomorphisme de E donné par :*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad u(e_i) = f_i.$$

D'après la proposition 0.19, u est un automorphisme orthogonal de E. Mais $P_{e \to f} = \mathrm{Mat}_e(f) = \mathrm{Mat}_e(u)$ et donc, d'après la dernière proposition, $P = P_{e \to f}$ est orthogonale.

— *De la même façon, si P est orthogonale, alors il en est de même de u et comme l'image d'une base orthonormale par un élément de $\mathrm{O}(E)$ est orthonormale, f est orthonormale.*

1.6 Etude du groupe orthogonal

Remarque 0.13 Soit $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Comme $A.A^{\mathrm{T}} = I_n$ et que $\det(A) = \det\left(A^{\mathrm{T}}\right)$, il vient que : $\det(A) = \pm 1$.

DÉFINITION - PROPOSITION 0.14 **Groupe spécial orthogonal $O_n^+(\mathbb{R})$**
Soit une matrice orthogonale $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(A) = \pm 1$. On définit les sous-ensembles de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ suivants :

$$O_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = +1\} \quad \mathrm{O}_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = -1\}$$

Les matrices de $O_n^+(\mathbb{R})$ sont appelées *spéciales orthogonales*. L'ensemble $O_n^+(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe orthogonal $(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \times)$.

Démonstration *On a déjà que $I_n \in O_n^+(\mathbb{R})$. Soient $A, B \in O_n^+(\mathbb{R})$ alors $A.B^{-1}$ est encore élement de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ car ce dernier est un groupe. De plus, avec les propriétés du déterminant $\det\left(A.B^{-1}\right) = 1$ donc $A.B^{-1} \in O_n^+(\mathbb{R})$ et $O_n^+(\mathbb{R})$ est bien un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.*

Proposition 0.23 **Critère pour reconnaître les matrices de $O_n^+(\mathbb{R})$**
Soit une matrice orthogonale $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Soit un coefficient $a_{ij} \neq 0$ de la matrice A et A_{ij} le cofacteur associé.

1. Si $A \in O_n^+(\mathbb{R})$, alors $a_{ij} = A_{ij}$;
2. si $A \in \mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$, alors $a_{ij} = -A_{ij}$.

Démonstration *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. *L'inverse de la matrice* A *est* A^{T}. *Cet inverse est aussi donné par* $(\mathrm{Com}\, A)^{\mathrm{T}} / \det A$ *où* $\mathrm{Com}\, A$ *est la comatrice de* A *(voir section* **??** *page* **??***). Alors par identification des coefficients dans ces deux matrices, pour tout* $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, *on a :* $a_{ij} = A_{ij} / \det A$. *Si* $A \in O_n^+(\mathbb{R})$, *alors* $\det A = 1$ *et* $a_{ij} = A_{ij}$. *Si* $A \in \mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$, *alors* $\det A = -1$ *et* $a_{ij} = -A_{ij}$.

Remarque 0.14 En pratique, pour vérifier qu'une matrice $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est spéciale orthogonale, on calcule le déterminant $\Delta_{11} = m_{11}$ et on compare son signe avec celui du coefficient a_{11}.

Définition 0.15 **Isométries directes et indirectes**
Soit une isométrie $u \in \mathrm{O}(E)$ d'un espace euclidien orienté E. Alors $\det(u) = \pm 1$. On dit que u est une *isométrie directe* de E lorsque $\det(u) = +1$, et une isométrie indirecte lorsque $\det(u) = -1$. On note $\mathrm{O}^+(E)$ l'ensemble des isométries directes, et $\mathrm{O}^-(E)$ l'ensemble des isométries indirectes de E. L'ensemble $\mathrm{O}^+(E)$ est un sous-groupe du groupe orthogonal $(\mathrm{O}(E), \circ)$.

Remarque 0.15 Si ε est une base orthonormale de E, et si U est la matrice de l'isométrie u dans la base ε, alors

$$\underbrace{\big(u \text{ isométrie directe }\big)}_{(i)} \Longleftrightarrow \underbrace{\big(U \in O_n^+(\mathbb{R})\big)}_{(ii)}.$$

Remarque 0.16 Dans un espace vectoriel euclidien orienté, une isométrie directe transforme une base orthonormée directe en une base orthonormée directe. (et une isométrie directe transforme une base orthonormée directe en une base orthonormée indirecte.)

Remarque 0.17 Dans un espace vectoriel euclidien orienté, tout endomorphisme qui transforme une base orthonormée directe en une base orthonormée directe est une isométrie directe.

1.6.1 Etude du groupe orthogonal en dimension 2.

On considère dans tout ce paragraphe un espace euclidien orienté E de dimension 2.

Théorème 0.24 **Etude de $O_2^+(\mathbb{R})$**

1. Les matrices de $O_2^+(\mathbb{R})$ sont de la forme

$$R_\theta = \boxed{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

où $\theta \in \mathbb{R}$.

2. $$\boxed{R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}}.$$

3. $$\boxed{R_\theta^{-1} = R_{-\theta}}.$$

4. L'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (O_2^+(\mathbb{R}), \times)\theta \\ \longmapsto & R_\theta \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. *On a les équivalences :*

$$\begin{aligned} & A \in O_2^+(\mathbb{R}) \\ \iff & AA^{\mathrm{T}} = 1 \quad \textit{et} \quad \det A = 1 \\ \iff & \begin{cases} a^2 + b^2 & = 1 \\ c^2 + d^2 & = 1 \\ ac + bd & = 0 \\ ad - bc & = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Des deux premières équations, on tire l'existence de θ *et* $\theta' \in \mathbb{R}$ *tels que :* $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$, $c = \cos\theta'$ *et* $d = \sin\theta'$. *La quatrième équation devient alors* $\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' = 1$ *c'est-à-dire* $\sin(\theta' - \theta) = 1$ *et la troisième devient* $\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' = 0$ *c'est-à-dire* $\cos(\theta' - \theta) = 0$. *Il vient alors* $\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ *et on obtient :*

$$A \in O_2^+(\mathbb{R}) \iff A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ où } \theta \in \mathbb{R}$$

2. *Cette formule est une conséquence directe du premier point et des formules d'addition pour le cosinus et le sinus.*
3. *D'après la formule précédente, on a :* $R_\theta R_{-\theta} = R_{\theta-\theta} = R_0 = I_2$ *donc* $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.
4. *Soient* $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. *On a :*

$$\varphi\left(\theta + \theta'\right) = R_{\theta+\theta'} = R_\theta \times R_{\theta'} = \varphi(\theta)\,\varphi\left(\theta'\right)$$

donc φ *est bien un morphisme de groupe. On a par ailleurs les équivalences :*

$$\varphi(R_\theta) = I_2 \iff \begin{cases} \cos\theta & = 1 \sin\theta \\ = 0 \end{cases} \iff \theta = 0\ [2\pi]$$

donc $\operatorname{Ker}\varphi = 2\pi\mathbb{Z}$.

Théorème 0.25 Rotations vectorielles
Soit E un espace euclidien de dimension 2 orienté et $u \in \mathrm{O}^+(E)$ une isométrie directe. Alors il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que pour *toute base orthonormale directe* ε de E,

$$Mat_\varepsilon(u) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

On dit que u est la rotation vectorielle d'angle θ et on note $u = r_\theta$.

Démonstration *C'est une conséquence directe du théorème précédent et du théorème 0.21.*

Théorème 0.26 Angle de deux vecteurs
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2 et $(U, V) \in E^2$ deux vecteurs non-nuls. On définit

$$u = \frac{U}{\|U\|}, \quad v = \frac{V}{\|V\|}.$$

Alors il existe une unique rotation $r \in O_2^+(\mathbb{R})$ telle que $v = r(u)$. Si θ est l'angle de la rotation $\theta \in [0, 2\pi[$, on note

$$\widehat{(U, V)} = \theta$$

l'angle orienté des vecteurs (U, V). On a alors :

$$\boxed{\mathrm{Det}(U, V) = \|U\|\|V\|\sin\theta} \quad \text{et} \quad \boxed{(U \mid V) = \|U\|\|V\|\cos\theta}.$$

Démonstration

- *On applique le procédé d'ortonormalisation de Schmidt 0.9 et on complète les vecteurs u et v en deux bases $e = (u, u')$ et $e' = (v, v')$ orthonormales directes du plan. D'après la proposition 0.22, la matrice de passage A de e à e' est orthogonale. Comme les bases sont directes, on a de plus $\det A = 1$. En résumé : $A \in O_2^+(\mathbb{R})$. Considérons alors l'endomorphisme φ de E tel que $\mathrm{Mat}_{e' \leftarrow e}(u) = A$. D'après la propriété précédente, φ est une rotation du plan. On a de plus $\varphi(u) = v$.*
- *Si φ et φ' sont deux rotations du plan envoyant u sur v, alors, avec les notations précédentes, $\varphi(u) = \varphi'(u)$ et comme les rotations conservent le produit scalaire et l'orientation, $\varphi(u') = \varphi'(u')$. Comme les endomorphismes φ et φ' sont égaux sur les vecteurs d'une base de E, ils sont égaux sur E : $\varphi = \varphi'$.*

Enfin, si $\theta \in [0, 2\pi[$ est l'angle de la rotation φ, dans la base e les coordonnées de u sont $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et celles de $v = \varphi(u)$:

$$\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}(10).$$

On vérifie alors facilement que

$$\mathrm{Det}(U, V) = \|U\|\|V\|\,\mathrm{Det}(u, v) = \|U\|\|V\|\sin\theta$$

et que

$$(U \mid V) = \|U\|\|V\|\,(u \mid v) = \|U\|\|V\|\cos\theta.$$

Remarque 0.18 On utilise ces formules pour déterminer l'angle entre deux vecteurs. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ euclidien orienté usuel, quel est l'angle entre les vecteurs $U=(1,1)$ et $V=(0,1)$?

THÉORÈME 0.27 **Etude de $O_2^-(\mathbb{R})$**
Considérons la matrice $P=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$. L'application

$$\Delta:\left\{\begin{array}{ccc} O_2^+(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})\\ A & \longmapsto & AP\end{array}\right.$$

est une bijection. Toute matrice de $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ est de la forme

$$B=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Démonstration *Laissée en exercice au lecteur.*

THÉORÈME 0.28 **Isométries indirectes et réflexion**
Une isométrie indirecte d'un espace euclidien orienté de dimension 2 est une symétrie orthogonale par rapport à une droite, c'est-à-dire une *réflexion*.

Démonstration *La matrice d'une isométrie indirecte u dans une base orthonormale $e=(e_1,e_2)$ étant de la forme $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$ et cette matrice vérifiant $A^2=A$, on en déduit que u est une symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}\ (u-\mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\ (u+\mathrm{id})$. Déterminons $\mathrm{Ker}\ (u-\mathrm{id})$. On a, dans la base e :*

$$\begin{aligned} & U=xe_1+ye_2\in \mathrm{Ker}\ (u-\mathrm{id})\\ \iff & \begin{cases}(\cos\alpha-1)\,x+\sin\alpha\ y=0\\ \sin\alpha\ x-(\cos\alpha+1)\,y=0\end{cases}\\ \iff & \begin{cases}\sin\dfrac{\alpha}{2}\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}\ x-\cos\dfrac{\alpha}{2}\ y\right)=0\\ \cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}\ x-\cos\dfrac{\alpha}{2}\ y\right)=0\end{cases}\\ \iff & \sin\frac{\alpha}{2}\ x-\cos\frac{\alpha}{2}\ y=0\end{aligned}$$

car on ne peut avoir en même temps $\sin\frac{\alpha}{2}=0$ et $\cos\frac{\alpha}{2}=0$. On en déduit que $\mathrm{Ker}\ (u-\mathrm{id})$ est la droite vectorielle d'équation polaire $\theta=\frac{\alpha}{2}$.
On montrerait de même que $U=xe_1+ye_2\in\mathrm{Ker}\ (u-\mathrm{id})$ si et seulement si $\sin\frac{\alpha}{2}\ x+\cos\frac{\alpha}{2}\ y=0$. Les deux droites vectorielles $\mathrm{Ker}\ (u-\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}\ (u-\mathrm{id})$ sont bien orthogonales et u est une réflexion du plan.

THÉORÈME 0.29 **Décomposition des rotations**
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2.

1. Toute rotation de E s'écrit comme composée de deux réflexions.
2. Réciproquement, tout produit de réflexion est une rotation.

Démonstration

1. *Soit r une rotation et s une réflexion de E. Posons $t = s^{-1} \circ r$. t est une isométrie de E et $\det t = \det\left(s^{-1}\right) \det u = -1$, donc t est indirecte. En vertu de la proposition 0.28, t est une réflexion et $r = s \circ t$ est bien la composée de deux réflexions.*
2. *Réciproquement, si s et t sont deux réflexions de E alors $s \circ t$ est une isométrie directe de E, c'est-à-dire une rotation.*

Remarque 0.19 Les réflexions engendrent le groupe orthogonal $O(E_2)$. Toute isométrie de E_2 s'écrit comme un produit de 1 ou 2 réflexions.

1.6.2 Etude du groupe orthogonal en dimension 3

On considère dans tout ce paragraphe un espace euclidien orienté E de dimension 3.

PROPOSITION 0.30 **Déterminant dans une base orthonormale directe**
Soit u, v, w trois vecteurs. Le déterminant de ces trois vecteurs exprimé dans une base orthonormale directe ne dépend pas de la base orthonormale directe choisie.

Produit mixte, produit vectoriel

Démonstration *On utilise la formule de changement de base :*

$$\det_{e'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{e'}(e_1, \dots, e_n) \times \det_{e}(x_1, \dots, x_n) .$$

La matrice de passage $P_{e' \leftarrow e}$ de e vers e' est donc aussi la matrice dans la base e de l'endomorphisme qui transforme e en e', donc qui transforme une base orthonormée directe en une base orthonormée directe. C'est donc une matrice de $O^+(E)$. Elle a donc un déterminant égal à 1. Donc $\det_{e'}(x_1, \dots, x_n) = \det_e(x_1, \dots, x_n)$. Ce qu'il fallait vérifier.

La propriété précédente permet d'énoncer la

DÉFINITION 0.16 **Produit mixte**
Soient u, v, w trois vecteurs. On appelle produit mixte de (u, v, w) le déterminant de (u, v, w) exprimé dans une base orthonormée directe. On le note $[u, v, w]$.

Les propriétés du determinant permettent d'énoncer :

PROPOSITION 0.31 **Propriétés du produit mixte**
Soit $(u, v, w) \in E^3$.

1. $[u, v, w] \neq 0$ si et seulement si (u, v, w) est une base de E.
2. $[u, v, w] = -[v, u, w]$.
3. $w \mapsto [u, v, w]$ est une forme linéaire.

D'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur $x \in E$ tel que $\forall w \in E$, $[u, v, w] = (x \mid w)$. D'où la définition :

Définition 0.17 Produit vectoriel
Soit u et v deux vecteurs. On appelle produit vectoriel de u et v l'unique vecteur noté $u \wedge v$ vérifiant $\forall w \in E$, $[u, v, w] = (u \wedge v \mid w)$.

Les propriétés du produit mixte permettent d'établir

Proposition 0.32 Propriétés du produit vectoriel
Soit $(u, v, w) \in E^3$.

1. $u \wedge v = -v \wedge u$ et $u \wedge u = 0$.
2. $(u + v) \wedge w = u \wedge w + v \wedge w$.
3. $u \wedge v = 0$ si et seulement si (u, v) est liée.

ainsi que

Proposition 0.33 Expression du produit vectoriel dans une base orthonormale directe
Soit (i, j, k) une base orthonormale *directe* de E. on a
- $i \wedge j = k, \quad j \wedge k = i, \quad k \wedge i = j,$

et si $u(x_1, y_1, z_1)$ et $v(x_2, y_2, z_2)$, alors $u \wedge v(L, M, N)$ avec

$$L = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \qquad M = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}, \qquad N = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Lemme 0.34
Soit u une isométrie de E. Il existe un vecteur non nul $\varepsilon \in E$ tel que soit $u(\varepsilon) = \varepsilon$, soit $u(\varepsilon) = -\varepsilon$.

Sous-espaces stables

Démonstration *Intéressons nous au polynôme $P(X) = \det(u - X\,\mathrm{id}) = 0$ et montrons que 1 ou -1 est une de ses racines. P est un polynôme à coefficients réels de degré 3 et le coefficient de son terme dominant est -1. Il vérifie donc $\lim_{X \to -\infty} P = +\infty$ et $\lim_{X \to +\infty} P = -\infty$. P est de plus continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, P admet une racine réelle $\alpha \in \mathbb{R}$. On a alors $\det(u - \alpha\,\mathrm{id}) = 0$ et $\mathrm{Ker}(u - \alpha\,\mathrm{id})$ n'est pas réduit au vecteur nul. Il existe donc un vecteur non nul $\varepsilon \in E$ tel que $u(\varepsilon) = \alpha\varepsilon$. Mais u étant une isométrie, il vient : $\|u(\varepsilon)\| = |\alpha|\,\|\varepsilon\| = \|\varepsilon\|$ et donc $\alpha = \pm 1$. On a ainsi prouvé l'existence d'un vecteur $\varepsilon \in E$ tel que $u(\varepsilon) = \varepsilon$ ou $u(\varepsilon) = -\varepsilon$.*

Lemme 0.35
Soit u une isométrie de E et soit $\varepsilon \in E$ un vecteur non nul tel que $u(\varepsilon) = \pm\varepsilon$. Considérons $D = Vect(\varepsilon)$ et soit H un supplémentaire orthogonale à D. Alors :

1. H est un plan vectoriel.

2. $u(H) \subset H$.
3. La restriction du produit scalaire de E à H est un produit scalaire sur H et pour ce produit scalaire, $u_{|H}$ est une isométrie de H.

Démonstration

1. *Comme* $\dim E = 3$*, que* $\dim D = 1$ *et que* H *et* D *sont supplémentaires dans* E*, il est clair que* $\dim H = 2$*.*
2. u *étant une isométrie, elle préserve le produit scalaire et si* $x \in H$ *alors*
$$(u(x) \mid \varepsilon) = \pm (u(x) \mid u(\varepsilon)) = \pm (x \mid \varepsilon) = 0$$
car H *et* D *sont des sous-espaces orthogonaux et* $u(H) \subset H$*.*
3. *Il est clair que la restriction du produit scalaire de* E *à* H *est un produit scalaire sur* H*. Notons* $(\cdot \mid \cdot)_{|H}$ *ce produit scalaire sur* H*. Pour tout* $x, y \in H$*, on a :*
$$\left(u_{|H}(x) \mid u_{|H}(y)\right)_{|H} = (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y) = (x \mid y)_{|H}$$
et u *est bien une isométrie de* H*.*

Application 0.4 Avec les notations des deux lemmes précédents, considérons $\varepsilon_3 = \dfrac{\varepsilon}{\|\varepsilon\|}$. On fixe ainsi une orientation de D et on a encore $u(\varepsilon_3) = \pm\varepsilon_3$. Le vecteur ε_3 induit une orientation du plan H. Considérons $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une base orthonormale directe de H. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base orthonormale directe de l'espace E. Comme $u_{|H}$ est une isométrie de H, d'après le travail effectué dans le paragraphe 1.6.1, on a deux possibilités pour $u_{|H}$:

— soit c'une réflexion de H par rapport à la droite vectorielle $D_1 = \operatorname{Ker}\left(u_{|H} - \mathrm{id}_H\right) \subset H$ dont un suplémentaire orhogonal dans H est donné par $D_2 = \operatorname{Ker}\left(u_{|H} + \mathrm{id}_H\right) \subset H$. On peut prendre dans ce cas pour ε_1 un vecteur unitaire qui engendre D_1 et pour ε_2 un vecteur unitaire qui engendre D_2 en sorte que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ soit directe.

— soit c'est une rotation de H d'angle $\theta \in \mathbb{R}$

On notera A la matrice de u dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et $E(1) = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id})$ le sous-espace vectoriel de E des vecteurs invariants par u.

1. $\boxed{\text{Cas 1 : } u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3 \text{ et } u_{|H} \text{ est une rotation :}}$ A est de la forme
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
où $\theta \in \mathbb{R}$ est l'angle de la rotation $u_{|H}$ du plan orienté H. On dit que u est une rotation d'angle θ et d'axe orienté D. Si $\theta \neq 0\,[\pi]$, on a : $E(1) = D$ et sinon $u = \mathrm{id}$ et $E(1) = E$.
2. $\boxed{\text{Cas 2 : } u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3 \text{ et } u_{|H} \text{ est une réflexion :}}$ Avec les vecteurs ε_2 et ε_3 précédemment construits, on a
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
u est alors une réflexion par rapport au plan $Vect(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$. De plus $E(1) = Vect(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$.

3. $\boxed{\text{Cas 3 : } u(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3 \text{ et } u_{|H} \text{ est une rotation :}}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   et u est la composée de la reflexion par rapport au plan $Vect(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et d'une rotation. Dans ce cas $E(1) = \{0\}$

4. $\boxed{\text{Cas 4 : } u(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3 \text{ et } u_{|H} \text{ est une réflexion :}}$ Comme dans le second cas, quitte à bien choisir les vecteurs ε_1 et ε_2, la matrice A est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & -1 & 00 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   u est alors une symétrie orthogonale par rapport à la droite $\text{Vect}(\varepsilon_1)$. Remarquons que u est aussi une rotation d'axe $\text{Vect}(\varepsilon_1)$ et d'angle π. Comme dans le premier cas, $E(1) = D$.

Remarque 0.20 Au regard des 4 formes précédentes pour la matrice A, u est une isométrie directe dans les cas 1 et 4 et indirecte dans les cas 2 et 3.

THÉORÈME 0.36 **Isométries directes en dimension 3 : rotations vectorielles**
Soit une isométrie directe $u \in \mathrm{O}^+(E_3)$. On note $E(1) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ le sous-espace vectoriel formé des vecteurs invariants par u. On a montré que :

1. Si $u \neq \mathrm{id}_E$, $E(1)$ est une droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}(\varepsilon_3)$ où ε_3 est un vecteur de norme 1 ;
2. Pour toute base orthonormée directe $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ (le troisième vecteur ε_3 dirigeant l'axe et fixé), la matrice de u dans la base ε s'écrit :

$$\boxed{Mat_e(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & & \\ \sin\theta & \cos\theta & 00 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

   On dit que u est la *rotation* d'axe $\mathrm{Vect}(e_3)$ et d'angle θ.

Remarque 0.21 L'angle de la rotation dépend du choix du vecteur d. Si l'on choisit $d' = -d$ pour diriger l'axe, l'angle θ est transformé en son opposé.

Remarque 0.22 Ne pas confondre l'angle θ de la rotation avec l'angle entre les vecteurs x et $r(x)$!

PROPOSITION 0.37 **Détermination de l'angle d'une rotation**
Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, r une rotation et ε un vecteur unitaire qui dirige l'axe de cette rotation. Ce vecteur ε définit une orientation du plan $H = \mathrm{Vect}\, d^{\perp}$ et donc de l'angle θ de r. Soit $x \in H$:

$$\boxed{r(x) = \cos\theta . x + \sin\theta . \varepsilon \wedge x}.$$

Isométries directes

Démonstration *Si $x=0$ le résultat est évident. Supposons que $x \neq 0$. On peut, sans perdre en généralité, supposer de plus que x est unitaire. Posons $y=\varepsilon \wedge x$. y est un vecteur orthogonal à ε et est donc élément de H. La famille (x,y,ε) forme une base orthonormale directe de E et la matrice de r dans cette base est*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & & \\ \sin\theta & \cos\theta & 00 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'image de x par r est donc le vecteur :

$$r\left(x\right)=\cos\theta.x+\sin\theta.y=\cos\theta.x+\sin\theta.\varepsilon\wedge x.$$

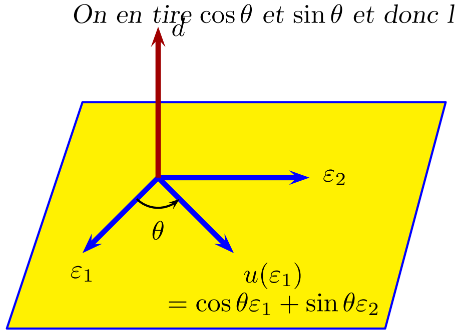
Remarque 0.23 Cette proposition donne un moyen pratique de déterminer les éléments caractéristiques d'une rotation :

Plan 0.2 : $\boxed{\text{Pour déterminer les éléments caractéristiques d'une rotation}}$

1. *Déterminer l'axe D de la rotation : c'est l'ensemble des vecteurs invariants.*
2. *Chercher un vecteur $d \in D$ unitaire. Il définit une orientation du plan $P=\mathrm{Vect}(d)^{\perp}$.*
3. *Déterminer un vecteur $\varepsilon_1 \in P$, c'est-à-dire vérifiant $(d \mid \varepsilon_1)=0$.*
4. *Poser $\varepsilon_2 = d\wedge\varepsilon_1$. Alors $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,d)$ est une base orthonormale directe de l'espace.*
5. *Calculer $r(\varepsilon_1)$ et le décomposer sur ε_1 et ε_2 :*

$$r(\varepsilon_1)=\cos\theta\varepsilon_1+\sin\theta\varepsilon_2$$

On en tire $\cos\theta$ et $\sin\theta$ et donc l'angle de la rotation.



Remarque 0.24 On peut également utiliser les remarques suivantes pour étudier une rotation u donnée par sa matrice A dans une base quelconque :

Plan 0.3 : $\boxed{\text{Pour étudier une rotation } u \text{ donnée par sa matrice } A}$

1. *On vérifie que $A \in O_3^+(\mathbb{R})$ en montrant que la matrice A est orthogonale et que $\det(A)=+1$ (il suffit de comparer a_{11} et Δ_{11}).*
2. *On sait que dans toute base orthogonale directe de la forme $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,d)$,*

$$Mat_\varepsilon(u)=U=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors les matrices A et U sont semblables et par conséquent, $\mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}(U)$ d'où l'on tire

$$\boxed{2\cos\theta+1=\mathrm{Tr}(A)}$$

3. *On détermine l'axe de la rotation en cherchant les vecteurs invariants :* $\mathrm{Vect}(d)$ *où* d *est un vecteur unitaire. Cela revient à résoudre un système homogène* 3×3.
4. *On détermine un vecteur* ε_1 *unitaire orthogonal à* d *et on calcule*

$$\mathrm{Det}\big(\varepsilon_1, u(\varepsilon_1), d\big)$$

Comme ce produit mixte est indépendant de la base orthonormale directe choisie pour le calculer, en introduisant (sans le calculer) ε_2 *tel que* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, d)$ *soit une base orthonormale directe,*

$$\mathrm{Det}\big(\varepsilon_1, u(\varepsilon_1), d\big) = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & 0 & & \\ 0 & \sin\theta & 00 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin\theta$$

5. *On obtient donc :*

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathrm{Tr}(A) - 1}{2}}, \quad \boxed{\sin\theta = \mathrm{Det}\big(\varepsilon_1, u(\varepsilon_1), d\big)}$$

et l'on en tire l'angle θ *de la rotation.*

Exemple 0.5 Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté euclidien usuel, on considère l'endomorphisme de matrice

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 & \sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

dans la base canonique. On va reconnaître cet endomorphisme et préciser ses éléments caractéristiques. On flaire une isométrie : On calcule la norme du premier vecteur colonne $\dfrac{1}{(2\sqrt{2})^2}(1 + 2\sqrt{2} + 2 + 2 + 2 - 2\sqrt{2} + 1) = 1$. Itou pour le deuxième $\frac{1}{(2\sqrt{2})^2}(2 + 4 + 2) = 1$. Le produit scalaire de ces deux vecteurs colonnes égale $\frac{1}{(2\sqrt{2})^2}(-\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2}) = 0$. Le produit vectoriel de ces deux vecteurs colonnes a pour coordonnées $\frac{2-2(\sqrt{2}-1)}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{4-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$, $\frac{-(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}-\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{-2+\sqrt{2}-\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$, $\frac{2(1+\sqrt{2})+(\sqrt{2})^2}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{2+2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$.
On retrouve bien le troisième vecteur colonne. On a donc une isométrie positive. C'est donc une rotation d'angle θ. Comme la trace égale $\frac{4+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1 = 1 + 2\cos\theta$. Donc $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour trouver l'axe, on résout le système $\left\{ \begin{array}{ccccccccc} (1+\sqrt{2}) & x & -\sqrt{2} & y & +(\sqrt{2}-1) & z & = & 2\sqrt{2} & x \\ \sqrt{2} & x & +2 & y & -\sqrt{2} & z & = & 2\sqrt{2} & y \\ (\sqrt{2}-1) & x & +\sqrt{2} & y & (1+\sqrt{2}) & z & = & 2\sqrt{2} & z \end{array} \right.$.

Soit $\left\{ \begin{array}{ccccccc} (1-\sqrt{2}) & x & -\sqrt{2} & y & +(\sqrt{2}-1) & z & = 0 \\ \sqrt{2} & x & +(2-2\sqrt{2}) & y & -\sqrt{2} & z & = 0 \\ (\sqrt{2}-1) & x & +\sqrt{2} & y & (1-\sqrt{2}) & z & = 0 \end{array} \right.$. On prend, par exemple, $d = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
Le vecteur $j(0, 1, 0)$ lui est orthogonal et appartient donc au plan de rotation. Son image est $r(j) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Enfin $j \wedge r(j) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} d$. Donc $\sin\theta d = \frac{\sqrt{2}}{2} d$.

Remarque 0.25 Il n'est pas compliqué de comprendre pourquoi c'est $\sin\theta d$ qui est un invariant de la rotation (et pas $\sin\theta$). Le vecteur d oriente le plan de rotation. Pour faire simple, il donne la direction du "haut". En changeant d en $-d$, on intervertit le "haut" et le "bas", on regarde le plan de l'autre côté, et donc on voit la rotation tourner "dans l'autre sens". Ceci a pour effet de changer $\sin\theta$ en son opposé.

Résumons l'étude précédente :

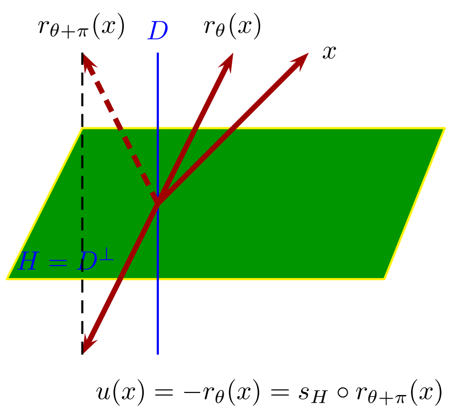
Théorème 0.38 — Classification des isométries en dimension 3
Soit un endomorphisme orthogonal $u \in \mathrm{O}(E)$. On note $E(1) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ le sous-espace formé des vecteurs invariants. Selon la dimension de $E(1)$, on a la classification suivante :

$\dim E(1)$	$\det(u)$	$u \in$	Nature de u
3	1	$O^+(E)$	id
2	-1	$\mathrm{O}^-(E)$	Réflexion s_H
1	1	$O^+(E)$	Rotation autour d'un axe r (dont les demi-tours)
0	-1	$\mathrm{O}^-(E)$	Composée d'une rotation et d'une réflexion

Dans le dernier cas, $u = r \circ s_H$, où le plan H invariant par la réflexion est orthogonal à l'axe de la rotation r.

Remarque 0.26 Si $A \in \mathrm{O}_3^-(\mathbb{R})$, alors $\det(-A) = -\det(A) = 1$. Donc la matrice $-A$ est spéciale orthogonale. On se ramène à l'étude précédente. On peut également résumer la classification des isométries de E_3 de la façon suivante :

- Isométries directes : ce sont des rotations d'axe une droite vectorielle. (Les symétries orthogonales par rapport à une droite sont des rotations d'angle π, et on convient que id_E est une rotation d'angle 0) ;
- Isométries indirectes : elles sont de la forme $-r_{D,\theta}$ où $r_{D,\theta}$ est une rotation par rapport à une droite vectorielle D (avec l'identité). On a alors $u = -r_{D,\theta} = r_{D,\theta+\pi} \circ s_{D^\perp}$.



Remarque 0.27 On montre qu'une rotation vectorielle $r_{D,\theta}$ s'écrit comme produit de deux réflexions s_H et $s_{H'}$ avec $H \cap H' = D$. Alors toute isométrie de E_3 se décompose comme un produit de réflexions. Par conséquent, les réflexions engendrent le groupe orthogonal $\mathrm{O}(E_3)$.

En résumé

Les différentes définitions données dans ce chapitre doivent être connues avec précision. Il ne faut être préçis et rigoureux quand on vérifie qu'une forme bilinéaire est un produit scalaire et il ne faut bien entendu omettre aucun axiome. Il faut de plus parfaitement connaître :

1. Les inégalités de Schwarz et de Minkowski.
2. Le théorème de Pythagore.
3. La notion de base orthogo(nor)nale et Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.
4. Les notions de sous-espaces orthogonaux, de projections et de symétries orthogonales.

Références