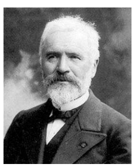
Calcul matriciel

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

11 août 2023

1 Calcul matriciel



Introduction au calcul matriciel.

Pour bien aborder ce chapitre

Tout est dit dans le théorème **??** page **??** du chapitre **??**...si on se fixe une base $e = (e_1, \dots, e_p)$ de E et une base $f = (f_1, \dots, f_q)$ de F alors une application linéaire $u \in L(E, F)$ est entièrement déterminée par les composantes des vecteurs $u(e_i)$ dans la base f. Ces pq scalaires définissent complètement u. Il est tentant de les représenter dans un tableau. Si on note, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{i,j} f_j$ alors on peut écrire :

$$\begin{array}{cc}
\begin{matrix} u(e_1) & \cdots & u(e_j) & \cdots & u(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qj} & \cdots & a_{qp} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow f_1 \\ \vdots \\ \leftarrow f_i \\ \vdots \\ \leftarrow f_q \end{matrix}
\end{array}$$

Ce tableau est la matrice de u dans les bases e de E et f de G. Se posent alors des questions naturelles :

1. Si on effectue cette manipulation pour deux applications linéaires u et v, comment se calcule la matrice correspondante à $\alpha u + \beta v$? On verra qu'on peut définir une addition entre les

matrices et une multiplication par un scalaire. Avec ces deux lois, l'ensemble des matrices (de même taille) possède une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2. Si u et v sont deux endomorphismes de E, quel est le lien entre la matrice de $u \circ v$ et celles de u et v ? Pour l'expliciter, on définira le produit entre les matrices.
3. Peut-on calculer le rang d'une application linéaire facilement à partir de sa matrice dans des bases données ? La réponse est oui et l'outil est le pivot de Gauss.
4. Peut-on par un procédé calculatoire déterminer si un endomorphisme est inversible à partir de sa matrice dans des bases données ? La réponse est encore oui et l'outil est le déterminant.
5. Pour un endomorphisme inversible, existe-t-il un procédé permettant de calculer la matrice de son inverse ? Cet outil existe et il est donné par la comatrice.
6. Si on prend d'autres bases e' et f' de E et F, peut-on calculer la matrice de u dans ces nouvelles bases en fonction de sa matrice dans les bases initiales ? La réponse est encore positive et on mettra en place des formules de changement de bases.
7. Enfin, pour un endomorphisme $u \in L(E)$, existe-il une base de E dans laquelle la matrice de u prend une forme simple et facile à manipuler ? La réponse sera donnée en spé dans le chapitre sur la réduction des endomorphismes.

Au niveau historique, on peut indiquer qu'au 3 $^{\text{e}}$ siècle, le mathématicien chinois Liu Hui résolvait les systèmes linéaires ayant jusqu'à 6 inconnues. Il représentait ces systèmes grâce à des tableaux et avait découvert la méthode qu'on appelle maintenant pivot de Gauss pour les résoudre. Au 17 $^{\text{e}}$ siècle, toujours pour résoudre des systèmes linéaires, Leibniz invente le déterminant. Cette notion est approfondie par Cramer qui découvre soixante ans plus tard la méthode qui porte maintenant son nom. Il faut attendre le 19 $^{\text{e}}$ siècle, pour que la notation matricielle sous forme de « rectangle (ou carré) de nombres » apparaisse. Gauss découvre le produit matriciel en dimension 3 et indique que la formule se généralise dans les autres dimensions mais sans détailler. Sylvester, le premier, dénomme ces rectangles de nombres du mot « matrix ».

Dans tout ce chapitre, m, n, p, q, r sont des entiers positifs, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes. E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1.1 Matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$

1.1.1 Définitions

Définition 0.1 **Matrice**
Soit $\mathbb{K}$ un corps et $q, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle *matrice à q lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$* toute application :

$$A : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K}\,(i,j) \\ & \longmapsto & a_{i,j} \end{array} \right.$$

que l'on note :

$$\begin{array}{cc} \text{colonne } j & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qp} \end{pmatrix} & \text{ligne } i \end{array}$$

— Le coefficient de A qui se trouve à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est noté $a_{i,j}$ ou $[A]_{i,j}$:

1. i représente l'indice de ligne.
2. j représente l'indice de colonne.

— On dit aussi que A est une matrice $q \times p$ ou une matrice (q, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

— On note $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à q lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

✎ *Notation 0.1* On notera aussi $[A]_{ij}$ ou encore a_{ij} le coefficient $a_{i,j}$ de A.

DÉFINITION 0.2 **Vecteur ligne, vecteur colonne d'une matrice**
Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \dots & \vdots a_{q,1} \\ \dots & a_{q,p} & \end{pmatrix}$$

on appelle, pour $(i, j) \in [\![1, q]\!] \times [\![1, p]\!]$:

— i-ème *vecteur ligne* de A le $p-$uplet $L_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,p}) \in \mathbb{K}^p$.

— j-ème *vecteur colonne* de A le $q-$uplet $C_j\,(a_{1,j}, \dots, a_{q,j}) \in \mathbb{K}^q$.

DÉFINITION 0.3 **Matrice ligne, matrice colonne**

— Une *matrice colonne* est une matrice qui ne possède qu'une seule colonne.

— Une *matrice ligne* est une matrice qui ne possède qu'une seule ligne.

DÉFINITION 0.4 **Matrice nulle**
On dit que $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est la matrice nulle de $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. On la note : $0_{\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})}$ ou 0 lorsqu'aucune confusion n'est à craindre.

Définition 0.5 Matrice carrée
Une matrice possédant autant de lignes que de colonnes est dite *carrée*. On note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes.

Définition 0.6 Matrice identité
On appelle *matrice identité* et on note I_n la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ donnée par :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & & & \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 00 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

Tous ses coefficients sont nuls sauf ceux situés sur la diagonale et qui valent 1.

Exemple 0.2 $I_1 = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 00 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.2 L'espace vectoriel $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$

On munit $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ d'une addition et d'une multiplication par un scalaire. Le triplet $(\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K}), +, .)$ est alors un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension pq.

Proposition 0.1 Somme de matrices, multiplication d'une matrice par un scalaire

— Soient $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On définit $A + B$ comme étant la matrice $C = (c_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ donnée par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!], \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

— Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit $\lambda \cdot A$ comme étant la matrice $D = (d_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ donnée par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!], \quad d_{i,j} = \lambda a_{i,j}$$

Muni de ces deux lois $(\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

Démonstration *Laissée au lecteur. On vérifie aisément les différents axiomes définissant un espace vectoriel.*

Exemple 0.3

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -20 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Définition 0.7 Matrices élémentaires
Pour tout $i \in [\![1,q]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$ on définit la *matrice élémentaire* $E_{i,j} \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ par :

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \text{colonne } j & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \boxed{1} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \text{ligne } i \end{array}$$

Tous les coefficients de la matrice élémentaire $E_{i,j}$ sont nuls sauf celui à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.

Exemple 0.4 Les matrices élémentaires de $\mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ sont

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, E_{1,3} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, E_{2,1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}, E_{2,2} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, E_{2,3} = \big(0 \quad 0 \quad 00$$

À titre d'exercice, et pour préparer le théorème suivant, montrer que cette famille de 6 matrices constitue une base de $\mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{K})$.

Théorème 0.2 Base canonique de $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$

La famille formée par les matrices élémentaires $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ appelée *base canonique de* $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On en déduit que :

$$\boxed{\dim \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K}) = qp}$$

Démonstration

— *Prouvons que cette famille est libre. Soient* $(\alpha_{i,j})_{i\in[\![1,q]\!],j\in[\![1,p]\!]}$ *une famille de scalaires de* $\mathbb{K}$ *tels que :* $\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p}\alpha_{i,j}E_{i,j} = 0$. *Alors on a l'égalité :*

$$\begin{pmatrix}\alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,p} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \alpha_{q,1} & \dots & \alpha_{q,p}\end{pmatrix} = 0.$$

Par identification des coefficients de ces deux matrices, on a : $\forall i \in [\![1,q]\!], \quad \forall j \in [\![1,p]\!], \quad \alpha_{i,j} = 0$ *ce qui prouve la liberté de la famille* $(E_{i,j})$.

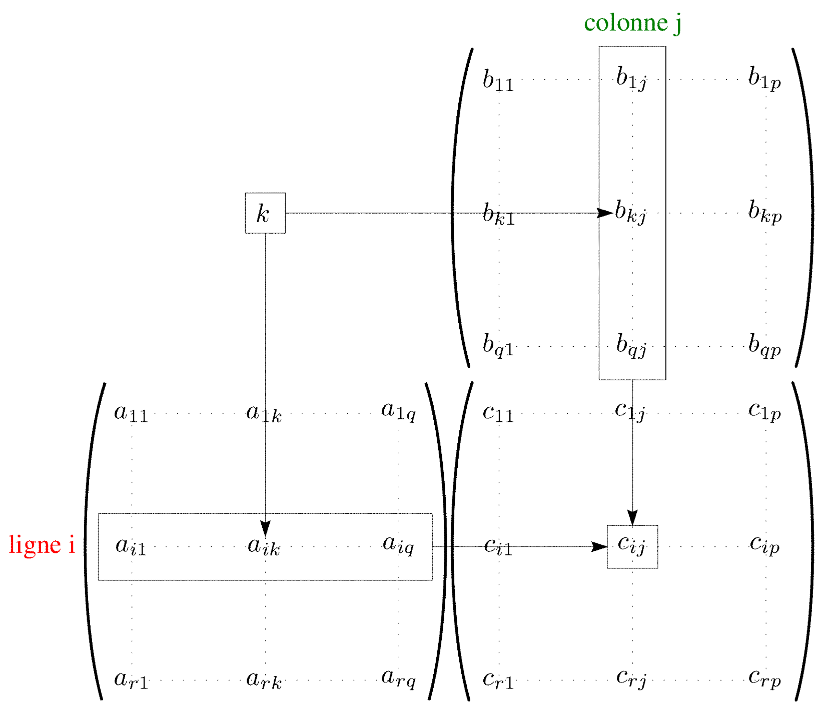
— *Montrons que cette famille est génératrice de* $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. *Soit* $A = (a_{i,j})_{i\in[\![1,q]\!],j\in[\![1,p]\!]} \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. *On a clairement :* $A = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}E_{i,j}$. *Ce qui prouve que la famille* $(E_{i,j})$ *est génératrice de* $\mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

1.1.3 Produit matriciel

On définit maintenant, quand c'est possible, le produit de deux matrices. Le théorème **??** page **??** explicite le sens de ce produit, il correspond en fait à la composition des applications linéaires.

DÉFINITION 0.8 **Produit matriciel**
Soit $A \in \mathfrak{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On définit AB comme la matrice C de $\mathfrak{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall i \in [\![1, r]\!] \quad \forall j \in [\![1, p]\!] \quad c_{i,j} = [AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j}$$



Attention 0.5 On ne peut effectuer le produit de $A \in \mathfrak{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{q',p}(\mathbb{K})$ que si $q = q'$!

Exemple 0.6 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ alors $AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} -1 & 31 & 1 \end{pmatrix}$. Remarquons qu'en général, le produit AB peut exister sans que ce ne soit forcément le cas pour le produit BA.

Il est souvent utile dans les exercices de savoir multiplier les matrices élémentaires. Pour ce faire introduisons le symbole de Kronecker.

DÉFINITION 0.9 **Symbole de Kronecker**
Pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, on définit le *symbole de Kronecker* $\delta_{i,j}$ par :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j0 \\ \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 0.1 Le nombre $\delta_{i,j}$ est l'élément générique de la matrice identité I_n.

THÉORÈME 0.3 **Produit de matrices élémentaires**
Pour deux matrices élémentaires de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on a la formule importante suivante qui donne leur produit :

$$\boxed{E_{k,\ell} E_{p,q} = \delta_{\ell,p} E_{k,q}}$$

Démonstration *Par un calcul direct. Voir aussi le paragraphe* **??** *page* **??**.

PROPOSITION 0.4 **Règles de calculs avec les matrices**
Quant les produit suivants sont possibles, pour des matrices A, B, C et des scalaires α, β :

1. Le produit matriciel est distributif à gauche par rapport à l'addition : $C(\alpha A + \beta B) = \alpha CA + \beta CB$.
2. Le produit matriciel est distributif à droite par rapport à l'addition :$(\alpha A + \beta B) C = \alpha AC + \beta BC$.
3. Le produit matriciel est associatif : $(AB) C = A (BC)$.
4. Le produit matriciel admet la matrice I_n comme élément neutre :$AI_n = I_n A = A$.

Démonstration *Laissée au lecteur.*

1.1.4 Transposition

DÉFINITION 0.10 **Transposée d'une matrice**
On appelle transposée de $A \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ la matrice noté $A^{\mathrm{T}} \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont formées par les lignes de A. Autrement dit :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \forall j \in [\![1, q]\!], \quad \left[A^{\mathrm{T}}\right]_{i,j} = a_{j,i}$$

Remarque 0.2 Transposer revient à échanger les lignes et les colonnes d'une matrice.

Exemple 0.7 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ alors $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 - 3 & 7 & -4 \end{pmatrix}$.

PROPOSITION 0.5
L'application :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{q,p}\left(\mathbb{K}\right) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{p,q}\left(\mathbb{K}\right) A \\ \longmapsto & {}^tA & \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, si $A, B \in \mathfrak{M}_{q,p}\left(\mathbb{K}\right)$ et si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\boxed{\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = A} \quad \text{et} \quad \boxed{\left(\alpha A + \beta B\right)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}} + \beta B^{\mathrm{T}}}.$$

Démonstration *La linéarité ainsi que la relation $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = A$ sont faciles à prouver. Pour la bijectivité, on propose deux méthodes :*

— *On montre facilement que, si $A \in \operatorname{Ker}\Phi$, on a $\left(A^{\mathrm{T}}\right) = 0$ et donc $A = \left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = 0$ et $\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$, θ est injective. Grâce à la formule du rang, on en déduit qu'elle est aussi surjective et donc bijective.*

— *On peut aussi remarquer que $\Phi \circ \Phi = \mathrm{id}$ ce qui prouve que Φ est bijective et égale à sa fonction réciproque.*

Remarque 0.3 En prenant un peu d'avance sur le paragraphe **??**, L'opération de transposition sur $\mathfrak{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$ est une symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}\Phi - \mathrm{id} = \mathcal{S}_n\left(\mathbb{K}\right)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}\Phi + \mathrm{id} = \mathcal{A}_n\left(\mathbb{K}\right)$.

PROPOSITION 0.6 **Transposée d'un produit**
Pour tout $A \in \mathfrak{M}_{r,q}\left(\mathbb{K}\right)$ et $B \in \mathfrak{M}_{q,p}\left(\mathbb{K}\right)$:

$$\boxed{(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}}$$

Démonstration *On suppose que $A = (a_{i,k}) \in \mathfrak{M}_{r,q}\left(\mathbb{K}\right)$, que $B = (b_{k,j}) \in \mathfrak{M}_{q,p}\left(\mathbb{K}\right)$, $C = AB = (c_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{r,p}\left(\mathbb{K}\right)$ où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j}$. On note aussi :*

— *$A' = A^{\mathrm{T}} = \left(a'_{i,k}\right) \in \mathfrak{M}_{q,r}\left(\mathbb{K}\right)$ avec pour tout $i \in [\![1, q]\!]$ et tout $k \in [\![1, r]\!]$, $a'_{i,k} = a_{k,i}$.*

— *$B' = B^{\mathrm{T}} = \left(b'_{k,j}\right) \in \mathfrak{M}_{p,q}\left(\mathbb{K}\right)$ avec pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ et tout $j \in [\![1, q]\!]$, $b'_{k,j} = b_{j,k}$.*

— *$C' = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} = \left(c'_{i,j}\right) \in \mathfrak{M}_{p,r}\left(\mathbb{K}\right)$.*

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et $j \in [\![1, r]\!]$:

$$c'_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} b'_{i,k} a'_{k,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{j,k} b_{k,i} = c_{j,i}$$

et par conséquent, $C' = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} = C = AB^{\mathrm{T}}$.

⚠ *Attention 0.8* Attention au retournement dans le produit.