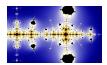
Suites réelles

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

 $^1{\rm Enseignant}$ en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg $^2{\rm Enseignant}$ en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse 3

27 janvier 2022

1 Suites réelles



Notion de limite puis théorèmes généraux sur les suites réelles.

On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut s'approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on puisse la supposer...

D'Alembert.

Pour bien aborder ce chapitre

Nous allons définir dans ce chapitre et le suivant une des notions les plus fondamentales en analyse, celle de *limite*.

Si on se pose les questions suivantes:

- Qu'est ce qu'une dérivée?
- Qu'est ce qu'une intégrale?
- Qu'est ce qu'une somme infinie?

La réponse est la même : une limite.

Bien que les mathématiciens utilisent ces différents objets depuis la renaissance, ce n'est que vers la fin du 18 e siècle et le début du 19 e siècle que la notion de limite, grâce à D'Alembert (voir ?? page ??) et à Cauchy (voir ?? page ??), commence à être formalisée. Le cours d'analyse de Cauchy, alors qu'il professait à l'École Polytechnique, allait d'ailleurs devenir une référence pour tout travail en analyse au 19 e siècle. Malgré la grande rigueur de son contenu, il subsistait des lacunes, comme une preuve, fausse, que la limite d'une série de fonctions continues est continue. Le mathématicien allemand Karl Weierstrass vers 1860 (voir biographie ?? page ??) et ses élèves

formalisèrent définitivement la notion de limite et parachevèrent l'œ uvre de Cauchy. La forme actuelle de la définition d'une limite est exactement celle donnée par Weierstrass.

Il vous faudra prendre le temps dans ce chapitre de bien comprendre les nouvelles notions, de faire et refaire les démonstrations. Il fallut plusieurs siècles pour que les mathématiciens formalisent ces concepts correctement. Il est alors naturel que cela vous demande un travail approfondi. Vous êtes en train de préparer les fondations sur lesquelles seront construites toute votre connaissance en analyse.

1.1 **Définitions**

1.1.1 Vocabulaire

Définition 0.1 Suite réelle

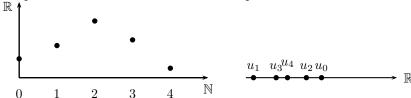
Une suite réelle est une application $u: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On note cette application sous forme indicielle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore (u_n) . L'ensemble des suites réelles est noté $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Remarque 0.1

- On appellera aussi suite réelle une application u définie à partir d'un certain $n_0 \in \mathbb{N}, u : \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n_0\} \to \mathbb{R}$. On la note : $(u_n)_{n \geqslant n_0}$.

 Attention aux notations : la notation (u_n) désigne une suite, alors que u_n désigne le terme

On adoptera une des visualisations suivantes pour une suite :



Opérations sur les suites

Opérations sur les suites

On définit les lois suivantes sur l'ensemble des suites $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Soient $(u_n), (v_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

- Addition: $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$ Multiplication par un scalaire: $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$
- Multiplication de deux suites : $(u_n) \times (v_n) = (u_n.v_n)$

Remarque 0.2

 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ muni de l'addition et de la multiplication précédemment définies a une structure d'anneau commutatif (que l'on verra plus tard).

- Élément neutre de l'addition : la suite nulle.
- Élément neutre de la multiplication : la suite constante égale à 1.
- $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire précédemment définies a une structure d'espace vectoriel que l'on verra plus tard.

Définition 0.3 Suite majorée, minorée, bornée

On dit qu'une suite réelle (u_n) est :

— majorée lorsque le sous-ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré dans \mathbb{R} , c'est-à-dire lorsque :

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M$$

— minorée lorsque le sous-ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est minoré dans \mathbb{R} , c'est-à-dire lorsque :

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m$$

— bornée si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.

Proposition 0.1

Une suite $(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)$ est majorée :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M$$

Démonstration

- Supposons que la suite (u_n) est bornée. Alors il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n \leqslant M$. En notant $K = \max(|m|, |M|)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant K$. La suite $|u_n|$ est majorée par le réel K.
- Si la suite $(|u_n|)$ est majorée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}, -M \leq u_n \leq M$ ce qui prouve que la suite (u_n) est bornée.

DÉFINITION 0.4 Suite croissante, décroissante, monotone On dit qu'une suite réelle (u_n) est

— croissante si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$$

— décroissante si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n$$

— monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante.

On dit que (u_n) est strictement croissante, strictement décroissante ou strictement monotone si et seulement si l'inégalité correspondante est stricte.

Définition 0.5 Suite constante

Une suite $(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ est dite constante lorsqu'il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha$.

Définition 0.6 À partir d'un certain rang

On dit qu'une propriété P(n) est vérifiée à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$ si et seulement s'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, la propriété P(n) est vraie.

1.2 Convergence d'une suite

1.2.1 Suites convergentes, divergentes

Définition 0.7 Limite, suite convergente, suite divergente

On dit qu'une suite réelle (u_n) converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si

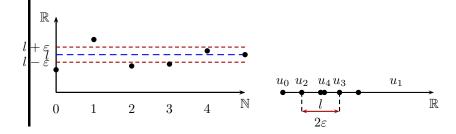
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \varepsilon$$

c'est-à dire, pour tout epsilon strictement positif, il existe un entier N qui dépend de epsilon tel que pour tout n plus grand que N, u_n est à une distance plus petite que ε de l.

On dit alors que l est la limite de la suite (u_n) et on note $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ ou encore $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$.

- S'il existe un tel l, on dit que la suite (u_n) est convergente.
- S'il n'existe pas de réel l vérifiant cette propriété, on dit que la suite (u_n) est divergente.

Remarque 0.3 Pour comprendre cette définition, étudiez le premier dessin de la figure ci-dessous. Imaginez qu'une clé à molette est centrée sur l'axe (Oy) en l. Vous pouvez choisir l'ouverture 2ε à votre guise aussi petite que vous le souhaitez. Chaque ouverture détermine une bande $[l-\varepsilon,l+\varepsilon]$. Si la suite converge vers l, on peut trouver un rang N à partir duquel tous les termes de la suite sont dans la bande $[l-\varepsilon,l+\varepsilon]$. Une autre façon de comprendre cette définition consiste à interpréter n comme un temps. À l'instant n, on allume un point sur l'axe (Ox) d'abscisse u_n . Pour tout $\varepsilon>0$, à partir de l'instant N, tous les points allumés seront dans l'intervalle $[l-\varepsilon,l+\varepsilon]$.



Multimédia : un pied à coulisse où l'on choisit ε avec le rang N à partir duquel tous les termes sont dans la bande $[l-\varepsilon,l+\varepsilon]$

PLAN 0.1 : Pour montrer que
$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$

On utilise le plan

- 1. Soit $\varepsilon > 0$.
- 2. On cherche à partir de quelle valeur N, on a $|u_N l| \le l$ en sorte de vérifier le point 3. Cela se ramène la plupart du temps à la résolution d'inéquations. C'est souvent la partie la partie la plus difficile de la preuve
- 3. Posons $N = \dots$
- 4. Vérifions : soit $n \ge N$, on a bien $|u_n l| \le \varepsilon$.
- 5. Donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.

Exemple 0.1 Montrons que la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 en utilisant le plan ci-dessus.

- 1. Soit $\varepsilon > 0$.
- 2. On cherche N tel que $1/N \leqslant \varepsilon$. On obtient $N \geqslant 1/\varepsilon$.
- 3. On pose alors $N = E(1/\varepsilon) + 1$.
- 4. Vérifions. Soit $n \ge N$. On a $n \ge N \ge 1/\varepsilon$ ce qui s'écrit aussi $1/n \le \varepsilon$ ou encore $|1/n 0| \le \varepsilon$.
- 5. Donc $1/n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

PROPOSITION 0.2 On peut utiliser une inégalité stricte dans la définition de convergence

Une suite (u_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

Démonstration

- est évidente puisqu'une inégalité stricte est à fortiori large.
- soit $\varepsilon > 0$. Posons $\varepsilon' = \varepsilon/2 > 0$. Puisque $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n l| \le \varepsilon'$ et à partir de ce rang, on a $|u_n l| \le \varepsilon' < \varepsilon$.

Remarque 0.4 Nous allons voir cette année plusieurs définitions d'analyse faisant intervenir des inégalités. Par défaut, nous utiliserons des inégalités larges. On peut souvent remplacer dans les définitions ces inégalités larges par des inégalités strictes au besoin en utilisant l'idée de la démonstration précédente.

Théorème 0.3 Unicité de la limite

La limite d'une suite réelle, si elle existe, est unique.

Démonstration \bigstar Supposons que (u_n) possède deux limites $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ et montrons par l'absurde que $l_1 = l_2$.

Supposons $l_1 \neq l_2$ et posons $\varepsilon = |l_1 - l_2|/2 > 0$. Puisque $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l_1$, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n - l_1| < \varepsilon$ et puisque $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l_2$, il existe un rang N_2 à partir duquel $|u_n - l_2| < \varepsilon$. Considérons l'entier $n = \max(N_1, N_2)$ supérieur à la fois à N_1 et N_2 . On a $|u_n - l_1| < \varepsilon$ et $|u_n - l_2| < \varepsilon$ mais alors, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$|l_1 - l_2| = |(l_1 - u_n) + (u_n - l_2)| \le |u_n - l_1| + |u_n - l_2| < 2\varepsilon = |l_1 - l_2|$$

ce qui est absurde.

Théorème 0.4 La valeur absolue d'une suite convergente est convergente Soit (u_n) une suite convergeant vers $l \in \mathbb{R}$. Alors $|u_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |l|$

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$, puisque $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n - l| \le \varepsilon$. Alors pour $n \ge N$, en vertu de la minoration de l'inégalité triangulaire voir ?? page ??, $|u_n| - |l| \le |u_n - l| \le \varepsilon$.

Théorème 0.5 Une suite convergente est bornée

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration $\bigstar \bigstar \bigstar$ Posons $\varepsilon = 1$. Puisque (u_n) converge, il existe $l \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$. Donc pour $n \geq N$, en vertu de la minoration de l'inégalité triangulaire, $|u_n| - |l| \leq |u_n - l| \leq 1$ et donc $|u_n| \leq 1 + |l|$. Les premiers termes sont en nombre fini, donc on peut poser $M = \max(|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, 1 + |l|)$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$ ce qui montre que la suite est bornée.

On se sert souvent du résultat suivant pour transformer l'hypothèse sur une limite en inégalité à partir d'un certain rang.

Théorème 0.6 Transformation de limite en inégalités

Soit (u_n) une suite et $k, k' \in \mathbb{R}$. On suppose que

- 1. $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$
- 2. k < l < k'

Alors, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, k \leq u_n \leq k'$.

Démonstration \bigstar Posons $\varepsilon = \min(l - k, k' - l) > 0$. Puisque $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$, il existe un rang N à partir duquel $|u_n - l| \le \varepsilon$. Alors, si $n \ge N$,

- $-u_n l \leqslant \varepsilon \leqslant k' l \text{ d'où } u_n \leqslant k',$
- $l u_n \leqslant \varepsilon \leqslant l k$ d'où $u_n \geqslant k$.

1.3 Opérations sur les limites

1.3.1 Opérations algébriques sur les limites

Les démonstrations de ce paragraphe sont très instructives pour comprendre ce qu'est une preuve d'analyse. Nous les avons rédigées en deux étapes. La première étape (qui se fait au brouillon) consiste à comprendre l'idée de l'approximation. La deuxième étape consiste à rédiger rigoureusement une preuve qui s'appuie sur le plan de démonstration correspondant aux définitions. Étudiez en particulier l'ordre dans lequel les différents objets sont introduits dans ces preuves.

Proposition 0.7

Soit (u_n) une suite réelle et l un réel. La suite (u_n) converge vers l si et seulement si la suite $(u_n - l)$ converge vers 0.

Il suffit d'écrire $|u_n - l| = |(u_n - l) - 0|$ dans la définition. Démonstration

Pour montrer qu'une suite converge vers une limite l, il suffit donc de majorer $|u_n - l|$ comme le montre le résultat suivant.

Proposition 0.8 Théorème de majoration

Soit (u_n) une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite réelle (α_n) et un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

1.
$$\forall n \geqslant N_1, \quad |u_n - l| \leqslant \alpha_n,$$

$$2. \quad \alpha_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

alors
$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$

Démonstration

- 1. Soit $\varepsilon > 0$.
- 2. Puisque $\alpha_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_2$, $|\alpha_n| \leqslant \varepsilon$.
- 3. Posons $N = \max(N_1, N_2)$.
- 4. Soit $n \ge N$. Puisque $n \ge N_1$ et $n \ge N_2$,

$$|u_n - l| \leqslant \alpha_n \leqslant \varepsilon$$

Théorème 0.9 La somme de suites convergentes est convergente

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que

1.
$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$

1.
$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{l} l$$
,
2. $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{l} l'$.

Alors
$$u_n + v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l + l'$$
.

Démonstration $\star\star\star$ Nous devons majorer $|(u_n+v_n)-(l+l')|$ à partir d'un certain rang. Notre hypothèse permet de majorer les quantités $|u_n-l|$ et $|v_n-l'|$ par un réel $\varepsilon'>0$ arbitraire à partir d'un certain rang. Faisons donc apparaître ces groupements avant d'utiliser l'inégalité triangulaire :

$$|(u_n + v_n) - (l + l')| = |(u_n - l) + (v_n - l')| \le |u_n - l| + |v_n - l'| \le 2\varepsilon'$$

Il ne reste plus qu'à rédiger rigoureusement la preuve en suivant le plan de démonstration.

- 1. Soit $\varepsilon > 0$.
- 2. Posons $\varepsilon' = \varepsilon/2 > 0$. Puisque $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n l| \leqslant \varepsilon'$. De même, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|v_n - l'| \leqslant \varepsilon'$.
- 3. Posons $N = \max(N_1, N_2)$.
- 4. Soit $n \ge N$, comme $n \ge N_1$ et $n \ge N_2$,

$$|(u_n + v_n) - (l + l')| \le |(u_n - l) + (v_n - l')| \le |u_n - l| + |v_n - l'| \le 2\varepsilon' = \varepsilon$$

THÉORÈME 0.10 Combinaison linéaire de suites convergentes

Soient deux suites (u_n) et (v_n) convergentes : $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ et $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l'$. Alors pour tous réels

$$\alpha u_n + \beta v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha l + \beta l'$$

Démonstration Similaire à la preuve précédente et laissée en exercice. Utiliser $\varepsilon' = \varepsilon/(|\alpha| + |\beta|)$ lorsque α et β ne sont pas tous les deux nuls.

Théorème 0.11 Produit de suites convergentes

On considère deux suites (u_n) et (v_n) convergentes :

- 1. $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \mathbb{R},$ 2. $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l' \in \mathbb{R}.$

Démonstration $\star\star\star$ Nous devons estimer la quantité $|u_nv_n-ll'|$ et utiliser notre hypothèse, $|u_n-l| \leqslant \varepsilon'$ et $|v_n-l'| \leqslant \varepsilon'$. Faisons donc apparaître ces groupements à l'intérieur des valeurs absolues avant de majorer grâce à l'inégalité triangulaire :

$$|u_n v_n - ll'| = |u_n (v_n - l') + l'(u_n - l)| \le |u_n| |v_n - l'| + |l'| |u_n - l| \le (|u_n| + |l'|) \varepsilon'$$

Il reste $|u_n|$ qu'il nous faut majorer. Nous savons qu'une suite convergente est bornée, donc $|u_n| \leq M$ et alors $|u_nv_n-ll'| \leq (|l'|+M)\varepsilon'$. Reste à rédiger rigoureusement la preuve en suivant le plan de démonstration.

- 1. Soit $\varepsilon > 0$.
- 2. Puisque la suite (u_n) converge, elle est bornée. Il existe M>0 tel que $\forall n\in\mathbb{N}, |u_n|\leqslant M$.

- 3. Posons $\varepsilon' = \varepsilon/(|l'|+M) > 0$. Puisque $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_1, \ |u_n-l| \leqslant \varepsilon'$. Puisque $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l'$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_2, |v_n - l'| \leqslant \varepsilon'$.
- 4. Posons $N = \max(N_1, N_2)$.
- 5. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$, on a

$$|u_n v_n - ll'| = |u_n (v_n - l') + l'(u_n - l)| \le |u_n| |v_n - l'| + |l'| |u_n - l| \le (M + |l'|) \varepsilon' = \varepsilon$$

Proposition 0.12 Inverse d'une suite convergente

Soit (u_n) une suite et $l \in \mathbb{R}$. On suppose que

1.
$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$$

2.
$$l \neq 0$$
.

1.
$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \mathbb{R},$$

2. $l \neq 0.$
Alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{l}.$

Démonstration ★★★ Nous devons estimer la quantité $|1/u_n - 1/l|$ en utilisant l'hypothèse $|u_n - l| \leq \varepsilon'$. Écrivons

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|u_n - l|}{|l||u_n|} \leqslant \frac{\varepsilon'}{|l||u_n|}$$

Il reste $|u_n|$ au dénominateur qu'il nous faut minorer. Comme $|u_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |l|$, et que k = |l|/2 < |l|, d'après la proposition 0.6, à partir d'un certain rang, $|1/u_n - 1/l| \leq 2\varepsilon'/|l|^2$. Il nous reste à rédiger rigoureusement cette idée en suivant le plan :

- 1. Soit $\varepsilon > 0$.
- 2. Posons $\varepsilon' = |l|^2 \varepsilon/2$.
- 3. Puisque $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$, il existe un rang N_1 à partir duquel $|u_n l| \leqslant \varepsilon'$.
- 4. Puisque d'après la proposition 0.4, $|u_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |l|$, en utilisant la proposition 0.6 avec k = |l|/2 < 1|l|, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2$, $|u_n| \geq |l|/2$.
- 5. Posons $N = \max(N_1, N_2)$.
- 6. Soit $n \ge N$,

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|u_n - l|}{|l||u_n|} \leqslant \frac{\varepsilon'}{|l|^2/2} = \varepsilon$$

Théorème 0.13 Quotient de suites convergentes

On considère deux suites (u_n) et (v_n) et on fait les hypothèses suivantes.

1.
$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$

2.
$$v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l'$$

3.
$$l' \neq 0$$

1.
$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$
,
2. $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l'$,
3. $l' \neq 0$.
Alors $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{l}{l'}$.

Démonstration Il suffit d'appliquer les théorèmes 0.12 puis 0.11.

Remarque 0.5 Les théorèmes précédents s'appellent les théorèmes généraux sur les suites.

1.3.2 Limites et relations d'ordre

Nous allons voir dans ce paragraphe les liens entre limites et inégalités. Ces résultats sont particuliers aux suites réelles et ne s'étendront pas aux suites complexes (il n'y a pas de relation d'ordre naturelle dans $\mathbb{C}!$).

Proposition 0.14 Passage à la limite dans une inégalité

Soit (u_n) une suite réelle et $k \in \mathbb{R}$. On suppose que :

- 1. $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \mathbb{R},$
- 2. À partir d'un certain rang, $u_n \leq k$.

Alors $l \leq k$.

Démonstration Montrons le résultat par l'absurde. Supposons l > k et posons $\varepsilon = l - k > 0$. Puisque $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n - l| < \varepsilon$ (on peut utiliser une inégalité stricte dans la définition de la limite). D'après la deuxième hypothèse, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $u_n \leq k$. Considérons l'entier $n = \max(N_1, N_2)$. On devrait avoir d'une part $l - u_n < l - k$ d'où $u_n > k$ et d'autre part $u_n \leq k$ ce qui est absurde.

Remarque 0.6 Attention aux hypothèses de ce théorème important : on suppose que la suite converge. En aucun cas un passage à la limite ne permet de justifier l'existence d'une limite. On obtient évidemment le théorème correspondant en remplaçant l'inégalité \leq par \geq .

Proposition 0.15 Passage à la limite dans les inégalités

Soient deux suites (u_n) et (v_n) . On suppose que :

- 1. $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$,
- $2. \quad v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l',$
- 3. À partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.

Alors $l \leq l'$.

Démonstration Il suffit d'utiliser le résultat précédent avec la suite $(w_n) = (u_n - v_n)$ et k = 0. **Multimédia**: Une suite cv vers l. On choisit une barre de hauteur k < l et on obtient le rang à partir duquel $u_n \ge k$

Théorème des gendarmes

On considère trois suites : (u_n) , (v_n) et (w_n) . On suppose que :

- 1. À partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$,
- 2. Les deux suites encadrantes (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$.

Alors la suite (u_n) converge vers l.

Démonstration ★

- 1. Soit $\varepsilon > 0$.
- 2. Puisque $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_2$, $|v_n l| \leqslant \varepsilon$. De même, il existe $N_3 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_3$, $|w_n l| \leqslant \varepsilon$. D'après la première hypothèse, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_1$, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$
- 3. Posons $N = \max(N_1, N_2, N_3)$.
- 4. Soit $n \ge N$. On a $u_n l \le w_n l \le \varepsilon$ et $l u_n \le l v_n \le \varepsilon$. Par conséquent, $|u_n l| \le \varepsilon$.

Remarque 0.7 Contrairement au passage à la limite dans les inégalités, le théorème des gendarmes garantit l'existence de la limite de (u_n) . Bien distinguer les deux théorèmes.

Théorème 0.17 Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

On considère une partie X non vide et majorée de \mathbb{R} . Elle possède une borne supérieure sup X. Soit un réel $l \in \mathbb{R}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

- 1. $l = \sup X$.
- 2. l est un majorant de X et il existe une suite (x_n) d'éléments de X qui converge vers l.

Démonstration ★ La preuve illustre bien l'utilisation des deux théorèmes précédents.

— On sait que sup X est un majorant de la partie X. Nous allons utiliser pour la première fois une technique importante en analyse : la construction d'une suite à partir d'une propriété à quantificateurs de la forme $\forall \varepsilon > 0, \ \exists x \dots$ Utilisons la caractérisation à ε de la borne supérieure (théorème ?? page ??).

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in X, \ \sup X - \varepsilon \leqslant x \leqslant \sup X$$

Soit $n \in \mathbb{N}[\star]$, en prenant $\varepsilon = 1/n > 0$ dans la propriété ci-dessus, il existe un réel $x_n \in X$ vérifiant $\sup X - 1/n \le x_n \le \sup X$. On construit ainsi une suite de points (x_n) de X qui converge vers $\sup X$ d'après le théorème des gendarmes.

— Montrons que l est le plus petit des majorants de la partie X. Soit M un majorant de X, on a $\forall x \in X, x \leq M$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ x_n \leqslant M$$

Mais puisque $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$, par passage à la limite dans les inégalités, on en déduit que $l \leqslant M$.

Multimédia: illustrer cette construction séquentielle

1.3.3 Limites infinies

Nous allons étendre la notion de limite d'une suite à $\overline{\mathbb{R}}$.

DÉFINITION 0.8 Suite divergeant vers $+\infty$ ou $-\infty$ Soit (u_n) une suite réelle.

— On dit que (u_n) diverge (ou tend) vers $+\infty$ si et seulement si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant M$$

On note alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

On dit que (u_n) diverge (ou tend) vers $-\infty$ si et seulement si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant m$$

On note alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.

Plan 0.2 : Pour montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

On utilise le plan :

- 1. Soit $M \in \mathbb{R}$.
- 2. Posons $N = \dots$
- 3. Vérifions : soit $n \ge N$, on a bien $u_n \ge M$

Remarque 0.8 Attention, il existe des suites divergentes qui ne tendent pas vers $\pm \infty$, par exemple la suite de terme général $(-1)^n$...

On étend les théorèmes généraux aux suites qui divergent vers l'infini. Par exemple :

Proposition 0.18

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que

1.
$$u_n \xrightarrow{\pi} l \in \mathbb{R}$$
,

1.
$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \mathbb{R},$$

2. $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$

Alors $u_n + v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

On veut minorer $u_n + v_n$ à partir d'un certain rang. Avec nos hypothèses, à partir d'un certain rang, $u_n \ge l-1$ et $v_n \ge M'$ (avec M' aussi grand que l'on veut). Alors à partir d'un certain rang, $u_n + v_n \ge M' + l - 1$. Il suffit de rédiger rigoureusement cette idée :

- 1. Soit $M \in \mathbb{R}$.
- 2. Posons M' = M l + 1.
- 3. Puisque $v_n \to +\infty$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1, v_n \geq M'$.
- 4. Puisque $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ et que k = l 1 < l, d'après le théorème 0.6, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_2, \ u_n \geqslant l-1.$
- 5. Posons $N = \max(N_1, N_2)$.
- 6. Soit $n \ge N$, $u_n + v_n \ge l 1 + M' = M$.

Plus généralement, on dispose des théorèmes généraux suivants qui utilisent les opérations sur \mathbb{R} vues dans les tables ?? page ??.

Théorème 0.19 Théorèmes généraux étendus à $\overline{\mathbb{R}}$ On considère deux suites (u_n) et (v_n) . On suppose que :

1.
$$u_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$$
,

$$2. \quad v_n \to l' \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$-u_n + v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l + l'$$
 sauf si $(l + l')$ est une forme indéfinie.
 $-u_n v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} ll'$ sauf si (ll') est une forme indéfinie.

—
$$u_n v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} ll'$$
 sauf si (ll') est une forme indéfinie.

—
$$u_n/v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l/l'$$
 sauf si l/l' est une forme indéfinie.

On utilise souvent la variante suivante du théorème des gendarmes :

Théorème 0.20 Théorème des gendarmes étendu à $\overline{\mathbb{R}}$

Soient deux suites (u_n) et (v_n) . On suppose que

1. À partir d'un certain rang,
$$v_n \leq u_n$$
,

$$2. \quad v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

Alors
$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$
.

De même, si

1. À partir d'un certain rang,
$$u_n \leq v_n$$
,

$$2. \quad v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty,$$

alors
$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$$

Démonstration

- 1. Soit $M \in \mathbb{N}$.
- 2. Puisque $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_1, v_n \geqslant M$.
- 3. D'après la première hypothèse, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_2, v_n \leqslant u_n$.
- 4. Posons $N = \max(N_1, N_2)$.
- 5. Soit $n \geqslant N$, $u_n \geqslant v_n \geqslant M$.

Suite extraite d'une suite 1.4

Définition 0.9 Suite extraite

On dit qu'un suite (v_n) est une suite extraite ou une sous suite d'une suite (u_n) s'il existe une application $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$$

Lemme 0.21

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geqslant n$$

Démonstration Par récurrence :

- 1. Si n = 0 alors comme φ est à valeurs dans \mathbb{N} , on a bien $\varphi(0) \geqslant 0$.
- 2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
- 3. On suppose que $\varphi(n) \ge n$. Montrons que $\varphi(n+1) \ge n+1$. Comme φ est strictement croissante, on a nécessairement $\varphi(n+1) > \varphi(n) \ge n$. Par conséquent $\varphi(n+1) \ge n+1$. (Si pour deux entiers x, y, on a x > y alors $x \ge y+1$).
- 4. La propriété est alors prouvée par application du principe de récurrence.

PROPOSITION 0.22 Une suite extraite d'une suite convergente est convergente

Toute suite extraite d'une suite (u_n) convergeant vers une limite l est une suite convergeant vers

Démonstration Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. On suppose que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$. Montrons que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.

- 1. Soit $\varepsilon > 0$.
- 2. Puisque $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, |u_n l| \leqslant \varepsilon$.
- 3. Soit $n \ge N$. D'après le lemme précédent, $\varphi(n) \ge n \ge N$ et donc $|u_{\varphi(n)} l| \le \varepsilon$.

COROLLAIRE 0.23 Critère de divergence d'une suite

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose qu'il existe deux suites extraites $u_{\varphi(n)}$ et $u_{\widetilde{\varphi}(n)}$ telles que :

- 1. $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l_1 \in \mathbb{R},$
- 2. $u_{\widetilde{\varphi}(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l_2 \in \mathbb{R},$
- 3. $l_1 \neq l_2$.

Alors la suite (u_n) est divergente.

Démonstration Il suffit de prendre la contraposée de la précédente proposition : si (u_n) admet des suites extraites qui ont des limites différentes, alors elle diverge.

Exemple 0.2 La suite $(u_n) = ((-1)^n)$ est divergente. En effet, la suite extraite (u_{2n}) converge vers 1 alors que la suite extraite (u_{2n+1}) converge vers -1.

Proposition 0.24 Critère de convergence d'une suite

Soit (u_n) une suite et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que :

1.
$$u_{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$

2.
$$u_{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$
 alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.

Démonstration

- 1. Soit $\varepsilon > 0$.
- 2. Comme $u_{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant N_1$, $|u_{2p} l| \leqslant \varepsilon$. Puisque $u_{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant N_2$, $|u_{2p+1} l| \leqslant \varepsilon$.
- 3. Posons $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$.
- 4. Soit $n \ge N$. Il y a deux possibilités.
 - Si n est pair, n=2p avec $2p \geqslant N \geqslant 2N_1$ d'où $p \geqslant N_1$ et alors $|u_{2p}-l| \leqslant \varepsilon$.
 - Si n est impair, n=2p+1 avec $2p+1\geqslant N\geqslant 2N_2+1$ d'où $p\geqslant N_2$ et alors $|u_{2p+1}-l|\leqslant \varepsilon$.

Dans les deux cas, on a vérifié que $|u_n - l| \le \varepsilon$.

1.5 Suites monotones

1.5.1 Théorème de la limite monotone

Théorème de la limite monotone

Soit (u_n) une suite *croissante*. On a les deux possibilités suivantes.

- 1. Si la suite (u_n) est majorée alors elle converge vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$ donnée par $l = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$
- 2. Si la suite (u_n) n'est pas majorée alors elle diverge vers $+\infty$.

Démonstration ★★★

- 1. Supposons que (u_n) soit une suite croissante et majorée par un réel M. L'ensemble $\mathscr{A} = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée de \mathbb{R} . En appliquant la propriété de la borne supérieure ??, cet ensemble possède une borne supérieure $l \in \mathbb{R}$. Montrons que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.
 - (a) Soit $\varepsilon > 0$.
 - (b) D'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe $x \in \mathscr{A}$ tel que $l \varepsilon \leqslant x \leqslant l$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x = u_N$ et on a $l \varepsilon \leqslant u_N \leqslant l$.
 - (c) Soit $n \ge N$. Puisque la suite (u_n) est croissante, $u_N \le u_n$ et comme l est un majorant de \mathscr{A} , $u_n \le l$. D'où $l \varepsilon \le u_N \le u_n \le l$. Mais alors $-\varepsilon \le u_n l \le 0$ ce qui montre que $|u_n l| \le \varepsilon$.
- 2. Supposons que (u_n) est croissante mais non majorée. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geqslant A$. Comme (u_n) est croissante, on a $\forall n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N \geqslant A$. Par conséquent $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

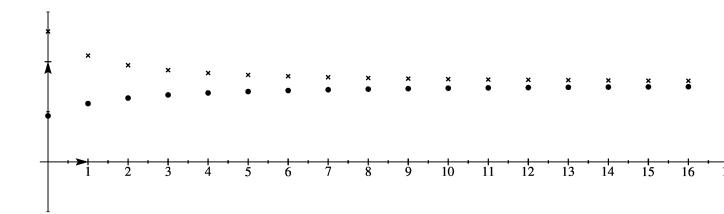


Figure 1 – Suites adjacentes

Remarque 0.9

- Ce théorème dit que toute suite croissante possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.
- La première partie de ce théorème est souvent formulée sous la forme suivante qu'il faut impérativement retenir :

Tout esuite relle crois sante et major e est convergente.

- Si une suite (u_n) croissante converge vers l, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant l$.
- Si un suite (u_n) décroissante converge vers l, on a $\forall n \in \mathbb{N}, l \leq u_n$.

Corollaire 0.26

Soit (u_n) une suite décroissante. On a les deux possibilités suivantes.

- 1. Si (u_n) est minorée alors (u_n) converge vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$ donnée par $l = \inf\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$
- 2. Si (u_n) n'est pas minorée alors elle diverge vers $-\infty$.

Démonstration Il suffit d'appliquer la propriété précédente à la suite $(-u_n)$.

Remarque 0.10 Le théorème de la limite monotone permet de justifier l'existence d'une limite sans la connaître explicitement. C'est un théorème d'existence abstrait très important en analyse.

1.5.2 Suites adjacentes

Définition 0.10 Suites adjacentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si

- 1. (u_n) est croissante
- 2. (v_n) est décroissante

$$3. \ v_n - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Théorème de convergence des suites adjacentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que

1. les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Alors ces deux suites sont convergentes et convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant l \leqslant v_n$$

Démonstration

- 1. Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N - v_N > 0$. Mais alors, comme (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, il vient pour tout $n \ge N$, $u_n - v_n \ge u_N - v_N > 0$ ce qui est en contradiction avec le fait que $u_n - v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. On en déduit en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ car (v_n) est décroissante et $v_n \geqslant u_n \geqslant u_0$ car (u_n) est croissante.
- 2. (u_n) est croissante et majorée par v_0 . En vertu du théorème de la limite monotone 0.25, (u_n) converge vers une limite $l_1 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l_1$.
- 3. (v_n) est décroissante et minorée par u_0 . En appliquant à nouveau le théorème de la limite monotone 0.25, (v_n) converge donc vers une limite $l_2 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant l_2$.
- 4. Enfin: $0 = \lim_{n \to +\infty} (v_n u_n) = \lim_{n \to +\infty} v_n \lim_{n \to +\infty} u_n = l_2 l_1$. Par conséquent $l_1 = l_2$.

Les deux suites convergent donc vers une même limite $l = l_1 = l_2$.

1.5.3 Approximation décimale des réels

Dans tout ce paragraphe x est un nombre réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$p_n = E\left(10^n x\right)$$

Par définition de la partie entière d'un réel, on a $p_n \leq 10^n x < p_n + 1$. Cette inégalité est équivalente $\hat{a} \frac{E(10^n x)}{10^n} \leqslant x < \frac{E(10^n x) + 1}{10^n}$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$$
 et $b_n = \frac{E(10^n x) + 1}{10^n}$

Définition 0.11 Valeur décimale approchée

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les rationnels a_n et b_n sont appelés respectivement valeurs décimales approchées de x à 10^{-n} près respectivement par défaut et par excès.

Exemple 0.3

n		a_n	b_n	erreur= 10^{-n}
1	$1 < \sqrt{2} < 2$	1	2	1
2	$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$	1.4	1.5	0.1
3	$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$	1.41	1.42	0.01
4	$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$	1.414	1.415	0.001

Théorème 0.28

Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et leur limite commune est x.

Démonstration Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que $p_n \leq 10^n x < p_n + 1$ où $p_n = E(10^n x)$. En multipliant par 10 chaque membre de cette inégalité, on obtient

$$10p_n \leqslant 10^{n+1}x < 10(p_n+1).$$

Or p_{n+1} est le plus grand entier inférieur à $10^{n+1}x$ et $1+p_{n+1}$ est le plus petit entier supérieur à $10^{n+1}x$. Par conséquent, on a

- $10p_n \leqslant p_{n+1}$ ce qui donne $\frac{p_n}{10^n} \leqslant \frac{p_{n+1}}{10^{n+1}}$ et donc $a_n \leqslant a_{n+1}$. La suite (a_n) est croissante.
- $--1+p_{n+1}<10\left(p_n+1\right)\;ce\;qui\;s'écrit\;aussi:\frac{1+p_{n+1}}{10^{n+1}}\leqslant\frac{p_n+1}{10^n}.\;La\;suite\;(b_n)\;est\;décroissante.$

Comme $b_n - a_n = 10^{-n}$, on a bien $b_n - a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et on a prouvé que les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Elles sont donc convergentes et convergent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n \leq 10^n x < p_n + 1$, on a nécessairement l = x par passage à la limite dans les inégalités

1.5.4 Segments emboités et théorème de Bolzano-Weierstrass

COROLLAIRE 0.29 Théorème des segments emboîtés

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments, $I_n=[a_n,b_n]$ tels que

- 1. Ils sont emboîtés : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$;
- 2. Leur diamètre tend vers $0:(b_n-a_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$

Alors il existe un réel $l \in \mathbb{R}$ tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{l\}$.

Démonstration Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, on a $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$ ce qui montre que la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) décroissante. La deuxième hypothèse montre que ces suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. Montrons par double inclusion que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{l\}$.

- Montrons que l appartient à l'intersection des intervalles I_n . Puisque les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent vers l, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq l \leq b_n$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $l \in I_n$ ce qui montre que $l \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$.
- Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Montrons que x = l. Par définition de l'intersection d'une famille (voir l'appendice ??), $\forall n \in \mathbb{N}, x \in I_n$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant x \leqslant b_n$$

Par passage à la limite dans les inégalités, on en tire que $l \leq x \leq l$ d'où l = x.

Karl Weierstrass, né le 31 octobre 1815 à Ostenfelde (Westphalie), mort le 19 février 1897 à Berlin Mathématicien Allemand. Karl Weierstrass est considéré comme le père de l'analyse moderne. Après des études secondaires brillantes, son père le force à étudier le droit à l'université de Bonn. Il ne fréquente guère les amphithéâtres et préfère s'adonner à l'escrime, aux mathématiques et à la boisson ... Tant et si bien qu'au bout de quatre ans il n'a toujours aucun diplôme. Son père consent à lui financer deux années supplémentaires afin qu'il décroche un poste d'enseignant dans le secondaire. Il rencontre alors Guddermann qui va le former aux mathématiques. Ce n'est qu'à 40 ans et alors qu'il enseigne dans le secondaire depuis une quinzaine d'année qu'il publie un article dans le fameux journal de Crelle sur les travaux qu'il a mené de façon isolée depuis plusieurs années. Il accède aussitôt à la célébrité et obtient rapidement un titre de docteur et une chaire à l'université de Berlin. Il s'est intéressé, entre autres aux fonctions analytiques et aux fonctions elliptiques. On lui doit le formalisme actuel en analyse.



Théorème 0.30 Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration Vous pouvez la sauter en première lecture. Nous allons uniquement donner une idée de la construction en ne rédigeant pas les récurrences complètes.

Considérons une suite (u_n) bornée. Il existe $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leq u_n \leq b_0$. Nous allons utiliser un procédé standard d'analyse, la dichotomie pour construire une suite extraite de (u_n) qui va converger.

- Posons $c_0 = (a_0 + b_0)/2$ et $G_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in [a_0, c_0]\}, D_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in [c_0, b_0]\}.$ Puisque $G_0 \cup D_0 = \mathbb{N}$, l'un de ces deux ensembles est infini.
- Si G_0 est infini, puisque G_0 est une partie non vide de \mathbb{N} , elle possède un plus petit élément n_0 (c'est un axiome des entiers que nous verrons prochainement). Posons $a_1 = a_0, b_1 = c_0$ $c_1 = (a_1 + b_1)/2$, $G_1 = \{n > n_0 \mid u_n \in [a_1, c_1]\}$, $D_1 = \{n > n_0 \mid u_n \in [c_1, b_1]\}$.
- Si G_0 est fini, alors D_0 est infini et possède un plus petit élément n_0 . On pose alors $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0, G_1 = \{n > n_0 \mid u_n \in [a_1, c_1]\}, D_1 = \{n > n_0 \mid u_n \in [c_1, b_1]\}.$

Dans les deux cas, $G_1 \cup D_1$ est un ensemble infini. On construit par récurrence une suite d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{K}}$ et deux suites réelles (a_n) , (b_n) vérifiant : $n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \ldots$, $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_k \leqslant a_k$ $b_k \leqslant \cdots \leqslant b_1 \leqslant b_0$ et $a_k \leqslant u_{n_k} \leqslant b_k$. Puisque $(b_k - a_k) = (b_0 - a_0)/2^k$, on vérifie facilement que ce sont deux suites adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. On définit alors l'application

$$\varphi: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}k \\ \longmapsto & n_k \end{array} \right.$$

qui est strictement croissante. Puisque $a_k \leqslant u_{n_k} \leqslant b_k$, d'après le théorème des gendarmes, la suite extraite $u_{\varphi(k)}$ converge vers l.

Multimédia: Animation qui explique cette construction.

1.6 Suites géométriques

Théorème 0.31 Convergence d'une suite géométrique

Considérons la suite géométrique (k^n) de raison $k \in \mathbb{R}$ et de premier terme 1.

- Si k > 1, la suite (k^n) diverge vers $+\infty$.
- Si k = 1, la suite (k^n) est constante et tend vers 1. Si |k| < 1, la suite (k^n) converge vers 0.
- Si $k \leq -1$, la suite (k^n) diverge.

En résumé la suite géométrique (k^n) converge si et seulement si |k| < 1 ou bien k = 1.



Démonstration

— Supposons k > 1. Nous allons utiliser l'inégalité suivante, dite de Bernoulli et qui se prouve aisément par récurrence (voir l'exercice ?? page ??) :

$$\forall x \geqslant 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Comme k > 1, on a k - 1 > 0 et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k^n = (1 + (k - 1))^n \geqslant 1 + n(k - 1)$. Comme k - 1 > 0, $n(k - 1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $k^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

- Si k = 1, trivialement $k^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.
- Si |k| < 1, alors en supposant que k est non nul et en posant b = 1/|k|, on a b > 1. D'après le premier point, on peut affirmer que $b^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et alors la suite $|k|^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et donc $k^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Si a = 0, le résultat est évident.
- Si $k \leqslant -1$, on peut extraire deux sous-suites de la suite (k^n) , les suites (k^{2n}) et (k^{2n+1}) . Si k < -1, la première sous-suite diverge vers $+\infty$ et la seconde diverge vers $-\infty$ et si k = -1, la première sous-suite converge vers 1 et la seconde converge vers -1. Dans les deux cas, appliquant le théorème 0.23, on peut affirmer que (k^n) est divergente.

Définition 0.12 **Série géométrique**

Soit $k \in \mathbb{R}$. On définit la progression géométrique (ou série géométrique) de raison k comme étant la suite de terme général

$$S_n = 1 + k + k^2 + \dots + k^n = \sum_{i=0}^n k^i$$

Théorème 0.32 Convergence d'une série géométrique

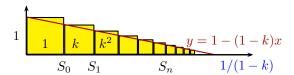
— On sait calculer une somme géométrique :

$$S_n = 1 + k + k^2 + \dots + k^n = \begin{cases} \frac{1 - k^{n+1}}{1 - k} & \text{si } k \neq 1n + 1\\ \text{si } k = 1 \end{cases}$$

— Si |k| < 1, la suite (S_n) converge vers le réel $\frac{1}{1-k}$ et si $|k| \ge 1$, la suite (S_n) diverge.

Démonstration Si |k| < 1, puisque $k^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $S_n = \frac{1 - k^{n+1}}{1 - k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{1 - k}$. Si k = 1, $S_n = n + 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et donc (S_n) diverge. Pour $|k| \ge 1$ et $k \ne 1$, puisque $(1 - k)S_n = 1 - k^{n+1}$, on tire $k^n = (1 - (1 - k)S_n)/k$. Si la suite (S_n) convergeait vers l, d'après les théorèmes généraux, la suite (k^n) convergerait vers (1 - (1 - k)l)/k ce qui est faux d'après le théorème précédent.

Remarque 0.12 Le dessin suivant permet de visualiser la limite de la somme géométrique dans le cas où 0 < k < 1. On place les uns après les autres des cubes de côté k^i . Multimédia : Faire varier k et la valeur de la somme

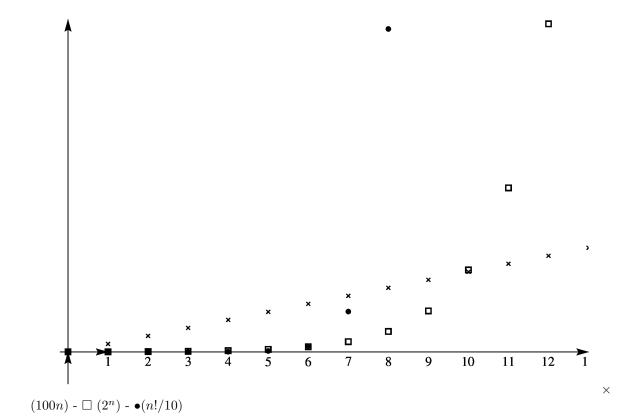


Remarque 0.13 Les suites et séries géométriques sont très utilisées en analyse. On essaie souvent de majorer des suites par des suites géométriques dont on connaît bien le comportement.

1.7 Relations de comparaison

1.7.1 Introduction

Bien que deux suites puissent avoir la même limite, elles peuvent avoir des comportement très différents en l'infini. On s'en convaincra en observant les graphes des suites (n), (2^n) et (n!/10). Une idée simple pour comparer le comportement asymptotique de deux suites (u_n) et (v_n) est d'étudier la nature de la suite quotient (u_n/v_n) . Cette idée est à la base des notions de domination, prépondérance et équivalence que nous allons développer maintenant. Ainsi, on dira que (v_n) est prépondérante devant (u_n) si $u_n/v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. On dira aussi que (u_n) et (v_n) sont équivalentes si $u_n/v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$. On verra que cette façon de comparer le comportement asymptotique des suites aura des conséquences utiles sur les méthodes de calcul de limites.



1.7.2 Suite dominée par une autre

Définition 0.13 Suite dominée par une autre

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est dominée par (v_n) si et seulement si il existe une suite (B_n) et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que :

- 1. (B_n) est une suite bornée.
- 2. $\forall n \geqslant N$, $u_n = B_n v_n$

On note alors : $u_n = \underset{n \to +\infty}{O}(v_n)$

Proposition 0.33 Transitivité de la relation O

Le relation O est transitive, ce qui signifie que si (u_n) , (v_n) et (w_n) sont trois suites, alors :

$$\left[u_n = \underset{n \to +\infty}{O}(v_n) \quad \text{ et } \quad v_n = \underset{n \to +\infty}{O}(w_n)\right] \quad \Rightarrow \quad u_n = \underset{n \to +\infty}{O}(w_n)$$

Démonstration Comme $u_n = \underset{n \to +\infty}{O}(v_n)$ et $v_n = \underset{n \to +\infty}{O}(w_n)$, il existe des suites bornées (B'_n) et (B''_n) telles que à partir d'un certain rang N' et d'un certain autre N'', on a : $\forall n \geqslant N'$, $u_n = B'_n v_n$ et $\forall n \geqslant N''$, $v_n = B''_n w_n$. Posons $N = \max(N', N'')$ et pour tout $n \geqslant N$, posons $B_n = B'_n \cdot B''_n$. La suite $(B_n)_{n \geqslant N}$ est bornée et :

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n = B'_n v_n = B'_n B''_n w_n = B_n w_n.$$

Par conséquent, $u_n = \underset{n \to +\infty}{O}(w_n)$.

Théorème 0.34 Une suite est dominée par une autre si et seulement si le quotient de la première par la deuxième est borné

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Si à partir d'un certain rang (v_n) ne s'annule pas alors :

$$u_n = \underset{n \to +\infty}{O}(v_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ est born\'ee}$$

Démonstration Supposons que (v_n) ne s'annule pas à partir du rang $N \in \mathbb{N}$. La suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant N}$ est donc bien définie. On peut supposer que (v_n) ne s'annule jamais (et donc que N=0). Dire que : $u_n=\underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ revient à dire qu'il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ et une suite bornée (B_n) tels que : $\forall n\geqslant N$, $u_n=B_nv_n$, ce qui est équivalent à dire que : $\forall n\geqslant N$, $\frac{u_n}{v_n}=B_n$ et donc que $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.

1.7.3 Suite négligeable devant une autre

Définition 0.14 Suite négligeable devant une autre

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) si et seulement si il existe une suite (ε_n) et un rang N tels que

1.
$$\varepsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

2. $\forall n \geqslant N, \quad u_n = \varepsilon_n v_n$

On note alors : $u_n = \underset{n \to +\infty}{o} (v_n)$.

Remarque 0.14 Écrire que $u_n = \underset{n \to +\infty}{o} (1)$ revient à dire que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Proposition 0.35 Transitivité de la relation o

La relation o est transitive, ce qui signifie que si (u_n) , (v_n) et (w_n) sont trois suites réelles, alors:

$$\left[u_n = \underset{n \to +\infty}{o}(v_n) \quad \text{ et } \quad v_n = \underset{n \to +\infty}{o}(w_n)\right] \quad \Rightarrow \quad u_n = \underset{n \to +\infty}{o}(w_n)$$

Démonstration Identique à la démonstration de la transitivité de O.

Une suite est négligeable devant une autre si et seulement si le quotient de la première par la deuxième tend vers 0.

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Si à partir d'un certain rang (v_n) ne s'annule pas alors :

$$u_n = \underset{n \to +\infty}{o} (v_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Identique à la démonstration du théorème 0.34. Démonstration

Remarque 0.15 Vous rencontrerez deux façons d'utiliser la notation o.

- La première est celle de la définition. Par exemple, on peut écrire $\ln n = o \atop n \to +\infty (n)$, ce qui signifie que $\ln n/n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
- Mais vous rencontrerez aussi des écritures comme :

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \mathop{o}_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^3} \right)$$

qui signifie que $1/(n-1) - \left(1/n + 1/n^2 + 1/n^3\right)$ est négligeable devant $1/n^3$ quand $n \to +\infty$. Autrement dit : $1/n + 1/n^2 + 1/n^3$ est une approximation de 1/(n-1) quand $n \to +\infty$ et l'erreur commise est un $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ c'est-à-dire est négligeable devant $1/n^3$ quand $n\to+\infty$.

1.7.4 Suites équivalentes

Définition 0.15 Suite équivalentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) si et seulement si :

$$u_n - v_n = \underset{n \to +\infty}{o} (v_n)$$

Proposition 0.37

La relation « est équivalente à » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites. Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites réelles. On a :

- $-- \sim \text{ est transitive}: u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n \quad \text{ et} \quad v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} w_n \Rightarrow u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} w_n.$

Démonstration Montrons que si $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$, alors $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$. Puisque $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$, à partir d'un certain rang N, $u_n - v_n = v_n \varepsilon_n$ où $\varepsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. On en tire $u_n = (1 + \varepsilon_n)v_n$. Puisque $\varepsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$,

à partir d'un rang $N_2 \geqslant N$, $1 - \varepsilon_n \neq 0$. Alors pour $n \geqslant N_2$, $v_n - u_n = -\varepsilon_n/(1 - \varepsilon_n)v_n$. Définissons la suite (e_n) par $e_n = -\varepsilon_n/(1 + \varepsilon_n)$. On a $e_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ce qui montre que $v_n - u_n = u_n$ d'où $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$. Les autres preuves sont laissées en exercice.

Théorème 0.38 Une suite est équivalente à une autre si et seulement si le quotient de la première par la deuxième tend vers 1.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Si (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

Plan 0.3 : Pour montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ on peut au choix, montrer que

- $1. \ \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$
- 2. À partir d'un certain rang, $u_n = (1 + \varepsilon_n)v_n$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
- 3. À partir d'un certain rang, $u_n = v_n + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n = \underset{n \to +\infty}{o} (v_n)$.

Théorème 0.39 Équivalents et limites

— Si
$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$$
 et si $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.

Soit
$$(u_n)$$
 et (u_n) deux suites réelles . Alors :

— Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ et si $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.

— Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$ avec $\overline{l \neq 0}$, alors $\overline{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} l}$.

Démonstration

- Comme $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$, il existe une suite (ε_n) telle que, à partir d'un certain rang : $u_n = (1 + \varepsilon_n)v_n$ et $\varepsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Comme $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$, par opération sur les limites : $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.
- Dire que : $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}^*$ revient à dire que : $\frac{u_n}{l} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ et donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} l$.

 \bigwedge Attention 0.4 Écrire $u_n \sim 0$ revient à dire qu'à partir d'un certain rang, les termes de la suite (u_n) sont tous nuls.

Un équivalent simple permet de connaître le signe d'une suite Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles équivalentes alors, il existe un rang à partir duquel elles sont de même signe

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow [\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, u_n v_n \geqslant 0]$$

Comme $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ il existe une suite (ε_n) telle que, à partir d'un certain rang : $u_n = (1 + \varepsilon_n)v_n$ et $\varepsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Le signe de $(1 + \varepsilon_n)v_n$ est donc donné, à partir d'un certain rang, par celui de v_n . Par conséquent, à partir d'un certain rang, les deux suites (u_n) et (v_n) sont de me signe.

Théorème 0.41 Produits, quotients, puissances d'équivalents

Soit (a_n) , (b_n) , (u_n) , (v_n) des suites vérifiant :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} a_n$$
 et $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n$

1.
$$u_n v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} a_n b_n$$

Démonstration Démontrons le premier équivalent. Les autres se prouvent de même. Comme $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} a_n$ et $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n$, il existe des suites (α_n) et (β_n) toutes deux convergeant vers 1 telles que à partir d'un certain rang : $u_n = \alpha_n a_n$ et $v_n = \beta_n b_n$. Par conséquent, à partir d'un certain rang : $u_n.v_n = (\alpha_n a_n).(\beta_n b_n) = \alpha_n \beta_n.a_n b_n$ et par opération sur les limites $\alpha_n \beta_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$. On a donc bien : $u_n v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} a_n b_n$.

Remarque 0.16 Attention, il ne faut pas

- 1. Sommer des équivalents.
- 2. Composer des équivalents. En particulier, il ne faut pas
 - Prendre des logarithmes d'équivalents.
 - Prendre des exponentielles d'équivalents.

Exemple 0.5 Par exemple:

- n+1 $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ n et -n $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ -n+2 mais cela n'a pas de sens d'écrire : 1 $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ 2.
- $2^n + n \underset{n \to +\infty}{\sim} 2^n$ mais par contre $e^{2^n + n}$ n'est pas équivalent à e^{2^n} .

1.8 Comparaison des suites de référence

Proposition 0.42 Comparaison logarithmique

1. Si
$$(u_n)$$
 et (v_n) sont deux suites à termes strictement positifs et si, à partir d'un certain rang,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

alors
$$u_n = \underset{n \to +\infty}{O} (v_n)$$
.

2. Soit (u_n) est une suite à termes strictement positifs. On a :

(a)
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l < 1 \Rightarrow u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

(b)
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l > 1 \Rightarrow u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} + \infty.$$

Démonstration

- 1. Si à partir d'un certain rang : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ alors, à partir d'un certain rang, on a : $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \frac{u_n}{v_n}$ et donc la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir de ce rang. Comme (u_n) et (v_n) sont à termes strictement positifs, cette suite est minorée par 0. On peut donc appliquer le théorème de la limite monotone 0.25, la suite $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers une limite $l \geqslant 0$. Par application du théorème 0.5, on peut affirmer que $\frac{u_n}{v_n}$ est bornée et donc que $u_n = \underset{n \to +\infty}{O} (v_n)$.
- 2. Posons $l = \lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
 - (a) Si l<1 alors on peut trouver un réel $r\in]l,1[$ (par exemple r=(l+1)/2). D'après le théorème 0.6 page 6, à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant r$. Par conséquent, si

$$\frac{u_{n+1}}{u_N} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \frac{u_n}{u_{n-1}} \dots \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \frac{u_{N+1}}{u_N} \leqslant \underbrace{r \dots r}_{n+1-N \text{ fois}} = r^{n+1-N}.$$

Donc $u_n \leqslant r^{n+1-N}u_N$ et comme $0 \leqslant r < 1$, la suite géométrique (r^n) converge vers 0. On en déduit que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

(b) Si l > 1 alors en prenant $r \in]1, l[$, à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant r$. La démonstration se termine comme la précédente.

Théorème 0.43 Comparaison des suites de référence

$$\left[(\ln n)^{\beta} = \underset{n \to +\infty}{o} (n^{\alpha}) \right] \qquad \left[n^{\alpha} = \underset{n \to +\infty}{o} (a^{n}) \right] \qquad \left[a^{n} = \underset{n \to +\infty}{o} (n!) \right]$$

$$n^{\alpha} = \underset{n \to +\infty}{o} (a^n)$$

$$a^n = \underset{n \to +\infty}{o} (n!)$$

$$n! = \underset{n \to +\infty}{o} (n^n)$$

Démonstration

— Soit
$$(u_n)$$
 la suite de terme général $u_n = \frac{(\ln n)^{\beta}}{n^{\alpha}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha} & \frac{\alpha}{\beta} \\ \frac{\alpha}{n^{\beta}} & \frac{\alpha}{n^{\beta}} \end{pmatrix}$.

 $\text{\it Mais } \frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0. \ \text{\it Par cons\'equent } \frac{\ln n^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\frac{\alpha}{\beta}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \ \text{\it et donc } u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \ \text{\it ce qui prouve que }$ $(\ln n)^{\beta} = \mathop{o}_{n \to +\infty} (n^{\alpha}).$

— Considérons maintenant la suite
$$(v_n)$$
 de terme général $v_n = \frac{n^{\alpha}}{a^n}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^a \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{a}$$

En appliquant le critère de comparaison logarithmique, on peut affirmer, puisque $0 < \frac{1}{a} < 1$, que $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et donc que $n^{\alpha} = \underset{n \to +\infty}{o} (a^n)$.

— Considérons la suite
$$(w_n)$$
 de terme général $w_n = \frac{a^n}{n!}$. On a

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

En appliquant à nouveau le critère de comparaison logarithmique, on peut affirmer que $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{}$ 0 et donc que $a^n = \underset{n \to +\infty}{o} (n!)$.

— Pour la dernière relation, si
$$n \geqslant 1$$
 on vérifie facilement que :

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}{n \times n \times n \times \dots \times n} \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

On peut aussi appliquer le critère de comparaison logarithmique à la suite (x_n) de terme général $x_n = \frac{n!}{n^n}$. On a:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{e} \in \left]0,1\right[.$$

THEOREME 0.44 Equivalents usuels
Soit (u_n) une suite telle que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

1. $\sin u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$ 2. $\tan u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$ 3. $\ln (1 + u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$ 4. $[1 - \cos u_n] \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$

1.
$$\sin u_n \sim u_n$$

$$2. \overline{ \tan u_n} \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$$

3.
$$\ln\left(1+u_n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$

4.
$$[1 - \cos u_n] \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$$

5.
$$extbf{$\left[e^{u_n}-1\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$}$$

6.
$$sh u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$$

5.
$$[e^{u_n} - 1] \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$$
6.
$$\sinh u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$$
7.
$$[(1 + u_n)^{\alpha} - 1] \underset{n \to +\infty}{\sim} \alpha u_n] (\alpha \in \mathbb{R}^*).$$