Equations différentielles linéaires du premier et second ordre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

2 janvier 2022

1 Equations différentielles linéaires du premier et second ordre

[redacted]

L'objet de ce chapitre est de donner des outils pour résoudre des équations différentielles du premier et du second ordre. Vous rencontrerez quotidiennement ces équations en mathématiques mais aussi en physique, en chimie et en sciences de l'ingénieur. Il est donc impératif de bien maîtriser les techniques développées ici. Indirectement, nous réviserons les techniques de primitivation enseignées en terminale. Il est conseillé à ce sujet de se remettre en mémoire les primitives des fonctions usuelles, voir l'annexe **??**. Vous pourrez dans une première lecture éviter de vous focaliser sur les démonstrations. Celles-ci s'éclairciront après les premiers rudiments d'algèbre linéaire du chapitre **??** et plus particulièrement le paragraphe **??** page **??** et le chapitre **??** d'intégration.

In Order to solve a differential equation you look at it
till a solution occurs to you
George Pólya - How to solve it.

1.1 Quelques rappels

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Le symbole $\mathbb{K}$ représentera indifféremment le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

1.2 Deux caractérisations de la fonction exponentielle

Remarque 0.1 Soit $a \in \mathbb{C}$ et $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{at}$. La fonction f_a vérifie :

— $f_a(0) = 1$
— $\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, \quad f_a(t + t') = f_a(t) f_a(t')$
— f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_a = a f_a$.

1.2.1 Caractérisation par une équation différentielle

On se propose d'étudier ici une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation différentielle $f' = af$ où $a \in \mathbb{C}^*$.

PROPOSITION 0.1 **Caractérisation de la fonction exponentielle l'équation différentielle $f' = af$**
Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et pour laquelle il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $f' = af$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \lambda e^{at}$.

Autrement dit, f vérifie : $f = \lambda f_a$. Si, de plus, $f(0) = 1$ alors $f = f_a$.

Démonstration *Introduisons la fonction* $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}t \\ \longmapsto & f(t)\, e^{-at} & \end{array} \right.$. *Il est clair que, pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *:*

$$\theta'(t) = f'(t)\, e^{-at} - af'(t)\, e^{-at} = af(t)\, e^{-at} - af'(t)\, e^{-at} = 0.$$

Donc θ est une fonction constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t)\, e^{-at} = \lambda$. Le résultat est prouvé. On vérifie aussi facilement que si $f(0) = 1$ alors $f = f_a$.

1.2.2 Caractérisation par une équation fonctionnelle

On se propose maintenant d'étudier une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(s + t) = f(s) f(t)$$

PROPOSITION 0.2 **Caractérisation de la fonction exponentielle par l'équation fonctionnelle $f(s + t) = f(s) f(t)$**
Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant l'équation $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(s + t) = f(s) f(t)$. Si il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$ alors f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. Sinon $f(0) = 1$ et il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $f' = af$, c'est-à-dire tel que $f = f_a$.

Démonstration *Remarquons que, pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, $f(s) = f((s - t) + t) = f(s - t)\, f(t)$. S'il existe un réel t tel que $f(t) = 0$ alors on déduit de l'égalité précédente que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. Supposons alors que f ne s'annule jamais. On a $f(0) = f(0 + 0) = f(0)\, f(0)$ et donc $f(0)\,(f(0) - 1) = 0$. Comme f ne s'annule jamais, il vient $f(0) = 1$. Par dérivation de l'égalité $f(s+t) = f(s) f(t)$ par rapport à s, on obtient $f'(s + t) = f'(s)\, f(t)$ et avec $s = 0$ cela amène $f'(t) = f'(0)\, f(t)$ ou encore $f'(t) = af(t)$ si $a = f'(0)$. Par application de la propriété 0.1 et comme $f(0) = 1$, on peut affirmer que $f = f_a$..*

FIGURE 1 – Champ de vecteurs et courbes intégrales

1.3 Équation différentielle linéaire du premier ordre

1.3.1 Vocabulaire

DÉFINITION 0.1 **Equation différentielle linéaire du premier ordre**
Soient a, b, c trois fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

— On appelle *équation différentielle du premier ordre* une équation différentielle de la forme

$$\forall t \in I, \quad a(t)\, y'(t) + b(t)\, y(t) = c(t) \quad (E)$$

— Une *solution* de cette équation différentielle est une fonction f dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et vérifiant :

$$\forall t \in I, \quad a(t)\, f'(t) + b(t)\, f(t) = c(t)$$

— *Résoudre*, ou *intégrer* l'équation différentielle (E) revient à déterminer l'ensemble des fonctions qui sont solutions de (E). On notera $S_{\mathbb{K}}(E)$ cet ensemble.

— Le graphe d'une solution f de (E) dans un repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ du plan est une *courbe intégrale* de (E).

— Si la fonction c est identiquement nulle, l'équation différentielle (E) est dite *homogène* ou *sans second membre*.

— (E) est dite *normalisée* si a est la fonction constante identiquement égale à 1 sur I.

Remarque 0.2 Si $y \in \mathcal{S}_E$, est une solution d'une équation différentielle explicite

$$(E) \quad y' = f(y, t)$$

alors en un point (t, y) de la courbe représentative de y, la pente de la tangente à cette courbe $\mathcal{C}_y$ vaut $f(y, t)$. La connaissance de la fonction f permet de tracer un champ de vecteurs. En un point (t_0, y_0) du plan on représente un vecteur de pente $f(t_0, y_0)$. Alors un point $(t_0, y(t_0))$ d'une courbe intégrale de (E), le champ de vecteurs sera tangent à la courbe. C'est l'idée de la **méthode d'Euler**, voir **??** page **??**.

Proposition 0.3 **L'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel**
Soit l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

$$\forall t \in I, \quad a(t)\, y'(t) + b(t)\, y(t) = 0 \quad (E).$$

Alors toute combinaison linéaire de solutions de (E) est encore solution de (E).

Autrement dit, si φ et ψ sont des solutions de (E) alors, pour tout couple de scalaires $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\alpha\varphi + \beta\psi$ est encore solution de E.

On dit que $S_{\mathbb{K}}(E)$ possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 0.2 **Condition initiale**
Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. On dit que la solution φ de (E) vérifie la *condition initiale* (t_0, y_0) si et seulement si $\boxed{\varphi(t_0) = y_0}$.

Définition 0.3 **Problème de Cauchy**
On appelle *problème de Cauchy* la recherche d'une solution $y : I \to \mathbb{K}$ d'une équation différentielle (E) vérifiant une condition initiale $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ fixée.

Augustin Louis Cauchy, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux le 23 mai 1857*Mathématicien français, Cauchy est, après Léonhard Euler (voir* **??***age* **??***, et avec près de 800 publications, le mathématicien le plus prolifique de l'histoire des mathématiques. Il fut un pionnier dans diverses branches des mathématiques comme l'étude de la convergence et de la divergence des séries (notions que vous découvrirez en spé), l'étude des groupes de permutations (voir le chapitre* **??** *ce travail fut précurseur de la théorie des groupes). Il travailla sur la théorie des équations différentielles et fut le découvreur des fonctions holomorphes. Il ne se comporta pas toujours de manière adroite avec les jeunes mathématiciens. Il sous-estima ainsi le travail d'Abel ou de Galois et égara même un mémoire, pourtant capital, de ce dernier. Il fut enseignant à l'école Polytechnique. Son cours était d'une rigueur inhabituelle pour l'époque et il fut décrié au départ par ses élèves et ses collègues. Il allait néanmoins devenir une référence pour tout travail en analyse au* 19^{me} *siècle.*

1.3.2 Résolution de l'équation différentielle homogène normalisée

Théorème 0.4 **Fondamental : résolution de l'équation différentielle homogène normalisée**

On suppose que :

1. I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
2. a est une fonction continue définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Alors les solutions de l'équation différentielle homogène normalisée :

$$\boxed{\forall t \in I, \qquad y'(t) + a(t)\, y(t) = 0 \quad (E)}$$

sont données par les fonctions

$$\boxed{\varphi_\alpha : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R}t \\ \longmapsto & \alpha e^{-A(t)} & \end{cases}}$$

où $\alpha \in \mathbb{K}$ et où A est une primitive de a sur I.

$$\boxed{S_{\mathbb{K}}(E) = \left\{t \mapsto \alpha e^{-A(t)} \mid \alpha \in \mathbb{K}\right\}}$$

Démonstration *Nous verrons dans le chapitre **??** que toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ possède une primitive sur cet intervalle (voir le théorème **??** page **??**).*

1. *Cherchons une solution de (E). Comme*

   (a) *I est un intervalle,*

   (b) *a est continue sur I,*

   on peut affirmer que a possède une primitive A sur I. Considérons la fonction φ_1 donnée par

$$\varphi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & e^{-A(t)} \end{array} \right.$$

   φ_1 est clairement dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables. De plus, si $t \in I$,

$$\begin{aligned} \varphi_1'(t) = & \quad -A'(t)\, e^{-A(t)} \\ = & \quad -a(t)\, e^{-A(t)}. \end{aligned}$$

   Par conséquent $\varphi_1'(t) + a(t)\varphi_1(t) = -a(t)\, e^{-A(t)} + a(t)\, e^{-A(t)} = 0$ et φ_1 est bien solution de (E).

2. *Montrons maintenant que toutes les autres solutions de (E) sont proportionnelles à celle-ci. Soit $\varphi : I \to \mathbb{K}$ une autre solution de (E). Comme φ_1 ne s'annule pas sur I, le quotient $\frac{\varphi}{\varphi_1}$ est défini sur I. Si nous prouvons que la dérivée de ce quotient est identiquement nulle sur I, alors, d'après le théorème **??**, la fonction $\frac{\varphi}{\varphi_1}$ est constante sur I et il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $t \in I$, $\frac{\varphi(t)}{\varphi_1(t)} = \alpha$ ce qui prouve bien que les deux fonctions sont proportionnelles. Calculons donc $\frac{\varphi}{\varphi_1}'$. Ce quotient est dérivable sur I car c'est un quotient de fonctions dérivables sur I. De plus, pour tout $t \in I$,*

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'(t) = & \quad \left(\varphi e^{A}\right)'(t) \\ = & \quad \varphi'(t)\, e^{A(t)} + a(t)\,\varphi(t)\, e^{A(t)} \\ = & \quad \big(\varphi'(t) + a(t)\,\varphi(t)\big)\, e^{A(t)} = 0 \end{aligned}$$

   car φ est une solution de (E). Le théorème est donc démontré.

Remarque 0.3 Avec les notations de cette dernière proposition, remarquons que si φ est une solution non nulle de (E) alors il en est de même de $\lambda\varphi$ où $\lambda \in \mathbb{K}$. Réciproquement, toute solution de (E) est proportionnelle à φ. $S_{\mathbb{K}}(E)$ possède une structure de droite vectorielle.

Exemple 0.1 Résoudre

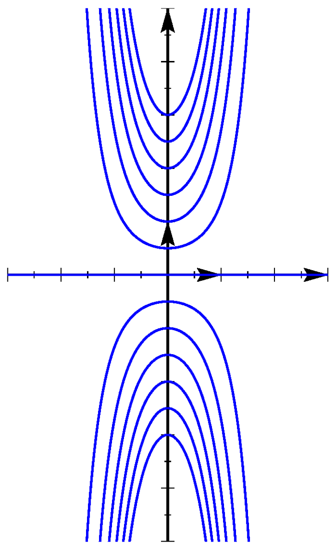
$$(E) : \quad y' - 2ty = 0$$

(E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre et normalisée. La fonction $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -2t \end{array} \right.$ possède des primitives sur $\mathbb{R}$. Une d'entre elles est donnée par A :

$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -t^2 \end{array}\right.$. Par application du théorème précédent, les solutions de (E) sont les fonctions :

$$\varphi_\alpha : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha e^{t^2} \end{array}\right.$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.



Proposition 0.5
Soient I un intervalle et a une fonction continue définie sur I, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Alors il existe une et une seule solution du problème de Cauchy l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)\,y(t) = 0 \quad (E)$$

vérifiant la condition initiale (t_0, y_0) (c'est-à-dire telle que $y(t_0) = y_0$).

Démonstration

— *Posons :*

$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K}t \\ & \longmapsto & y_0 \exp\left(-\int_{t_0}^t a(u)\ du\right) \end{array}\right.$$

Remarquons que $t \to \int_{t_0}^t a(u)\ du$ est la primitive de a sur I qui s'annule en t_0. Par application du théorème précédent, φ est solution de (E). De plus,

$$\varphi(t_0) = y_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t_0} a(u)\ du\right) = y_0.$$

Par conséquent, φ vérifie bien la condition initiale $\varphi(t_0) = y_0$.

— *Soit ψ une autre solution de E qui vérifie la condition initiale (t_0, y_0). Par application du théorème précédent, φ et ψ sont proportionnelles :*

$$\exists c \in \mathbb{K}, \quad \psi = c\varphi.$$

— *Si $y_0 = 0$ alors φ est la fonction nulle et il en est donc de même de ψ. On a donc bien $\psi = \varphi$.*

— *Sinon, si $y_0 \neq 0$, on a*

$$y_0 = \psi(t_0) = c\varphi(t_0) = cy_0$$

ce qui amène, en divisant les deux membres de cette égalité par y_0 que $c = 1$ et donc, là encore que $\psi = \varphi$.

Remarque 0.4 Avec les hypothèses de la proposition précédente : si $t_0 \in I$,

$$S_{\mathbb{K}}(E) = \left\{ t \mapsto c \ \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(u)\ \mathrm{d}u \right) \mid c \in \mathbb{K} \right\}$$

La solution prenant la valeur y_0 en t_0 est exactement $t \mapsto y_0 \ \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(u)\ \mathrm{d}u \right)$.

Remarque 0.5 Si une solution s'annule en un point, alors elle est nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier. Si une solution est non nulle en un point, alors elle ne s'annule jamais.

1.3.3 Résolution de l'équation différentielle normalisée avec second membre

PROPOSITION 0.6

Considérons l'équation différentielle :

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t) \quad (E)$$

On suppose que :

1. I est un intervalle de $\mathbb{R}$
2. a et b sont des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
3. $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$ est une solution particulière de (E).

alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $\varphi_0 + \varphi$ où φ est une solution de l'équation différentielle homogène associée

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + ay(t) = 0 \quad (H).$$

Autrement dit : toute solution de (E) est somme d'une solution φ de l'équation homogène (H) associée à (E) et d'une solution particulière φ_0 de (E)

$$S_{\mathbb{K}}(E) = \{\varphi_0 + \varphi \mid \varphi \in S_{\mathbb{K}}(H)\} = \varphi_0 + S_{\mathbb{K}}(H)$$

Démonstration

— *Soit $\varphi : I \to \mathbb{K}$ une solution de l'équation homogène (H) associée à (E). On a donc $\varphi' + a\varphi = 0$. La fonction $\varphi_0 + \varphi$ est solution de (E). En effet :*

$$\begin{aligned}(\varphi_0+\varphi)' + a(\varphi_0+\varphi) &= \varphi_0' + \varphi' + a\varphi_0 + a\varphi \\ &= \underbrace{(\varphi_0' + a\varphi_0)}_{b} + \underbrace{(\varphi' + a\varphi)}_{0} \\ &= b.\end{aligned}$$

— *Réciproquement, soit ψ une solution de (E). Montrons qu'il existe $\varphi \in S_{\mathbb{K}}(H)$ tel que $\psi = \varphi_0 + \varphi$. Cela revient à montrer que $\psi - \varphi_0$ est solution de (H). On vérifie que c'est le cas car :*

$$\begin{aligned}(\psi-\varphi_0)' + a(\psi-\varphi_0) &= \underbrace{(\psi' - a\psi)}_{b} - \underbrace{(\varphi_0' - a\varphi_0)}_{b} \\ &= b - b = 0.\end{aligned}$$

Exemple 0.2 Résolvons sur $I = \mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$y' + ty = t \quad (E)$$

Par application du théorème 0.4, les solutions de l'équation homogène : $y' + ty = 0$ sont les fonctions $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \alpha e^{-\frac{t^2}{2}}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Une solution évidente de (E) est la fonction constante : $\varphi : t \mapsto 1$. D'après le théorème précédent, les solutions de (E) sont les fonctions :

$$\psi_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}t \\ & \longmapsto & 1 + \alpha e^{-\frac{t^2}{2}} \end{cases} ; \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1.3.4 Détermination de solutions particulières

PROPOSITION 0.7 **Principe de superposition des solutions**
Soient $a,\ b,\ b_1,\ b_2$ quatre fonctions définies et continues sur I telles que $b = b_1 + b_2$. On considère les équations différentielles

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)\,y(t) = b(t) \quad (E)$$

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)\,y(t) = b_1(t) \quad (E_1)$$

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)\,y(t) = b_2(t) \quad (E_2)$$

Si y_1 et y_2 sont des solutions particulières respectivement de (E_1) et (E_2) alors $y = y_1 + y_2$ est une solution particulière de (E).

Superposition des solutions

Démonstration *En effet :*

$$\begin{aligned}(y_1+y_2)' + ay(y_1+y_2) &= \underbrace{y_1' + ay_1}_{b_1} + \underbrace{y_2' + ay_2}_{b_2} \\ &= b_1 + b_2 = b\end{aligned}$$

PROPOSITION 0.8

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et P un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$. L'équation

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + \alpha\, y(t) = \boxed{P(t)} \qquad (E)$$

admet comme solution particulière :

- Un polynôme de degré $n+1$ si $\alpha = 0$.
- Un polynôme de degré n sinon.

Trois cas particuliers

Démonstration

- *Si $\alpha = 0$, une solution de (E) est donnée par une primitive de P. Le polynôme P étant de degré n, cette primitive est nécessairement de degré $n+1$.*
- *Si $\alpha \neq 0$, commençons par traiter le cas où P est donné par $P(t) = \lambda t^n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Cherchons une solution de (E) sous la forme $\varphi : t \mapsto \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$ où pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. On a :*

$$\begin{aligned}
& \varphi \text{ est solution de } (E) \\
\Rightarrow \quad & \sum_{k=1}^{n} k\alpha_k t^{k-1} + \alpha \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k = \lambda t^n \\
\Rightarrow \quad & \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\alpha_{k+1} t^k + \alpha \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k = \lambda t^n \\
\Rightarrow \quad & \alpha.\alpha_n t^n + \sum_{k=0}^{n-1} \left((k+1)\,\alpha_{k+1} + \alpha.\alpha_k\right) t^k = \lambda t^n \\
\Rightarrow \quad & \begin{cases} \alpha.\alpha_n = \lambda \\ \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad (k+1)\,\alpha_{k+1} + \alpha.\alpha_k = 0 \end{cases} \qquad \textit{par identification} \\
\Rightarrow \quad & \alpha_n = \frac{\lambda}{\alpha} \text{ et } \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \alpha_k = -(k+1)\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha} \text{ car } \alpha \neq 0
\end{aligned}$$

Réciproquement, si les coefficients de $\varphi : t \mapsto \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$ sont donnés par les relations précédentes, on vérifie que φ est une solution de (E). On prouve ainsi que (E) possède une solution polynomiale de degré n dans le cas où P est un monôme de degré n. Traitons maintenant le cas général. On suppose que P est donné par $P(t) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k t^k$ où : $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \lambda_k \in K$. Considérons les $n+1$ équations :

$$\begin{aligned}
y' + \alpha y &= \lambda_0 & (E_0) \\
y' + \alpha y &= \lambda_1 t & (E_1) \\
y' + \alpha y &= \lambda_2 t^2 & (E_2) \\
\vdots &= & \vdots \\
y' + \alpha y &= \lambda_n t^n & (E_n)
\end{aligned}$$

Compte tenu de ce qui vient d'être prouvé, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, (E_k) admet une solution polynomiale φ_k de degré k si $\lambda_k \neq 0$ et la solution nulle sinon. Par application du principe de superposition, on peut alors affirmer que $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \cdots + \varphi_n$ est solution de E. Comme P est de degré n, φ_n est différent de 0 et φ_n est nécessairement de degré n. Le polynôme φ est donc clairement de degré n.

Remarque 0.6 Pour montrer la puissance de l'algèbre linéaire (à venir), voici comment on pourra démontrer cette propriété :
Pour $\alpha \neq 0$, on considère l'application f de $\mathbb{K}_n[X]$ dans lui-même défini par $f(P) = P' + \alpha P$. On a $\deg(f(P)) = \deg P$. On en déduit que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. f est injective donc surjective. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION 0.9
Soient P un polynôme de degré n, $m \in \mathbb{K}$ et a une fonction continue sur I. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, l'équation

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + \alpha\, y(t) = \boxed{P(t)\, e^{mt}} \qquad (E)$$

admet une solution particulière sur I de la forme $t \mapsto Q(t)\, e^{mt}$ où :

— Q est un polynôme de degré n si $\alpha + m \neq 0$

— Q est un polynôme de degré $n+1$ si $\alpha + m = 0$.

Démonstration *Considérons $\psi : I \to \mathbb{K}$ et $\varphi : I \to \mathbb{K}, t \mapsto \psi e^{-mt}$. Montrons que ψ est solution de $(E) : y' + \alpha y = Pe^{mt}$ si et seulement si φ est solution de $(E)' : z' + (\alpha + m) z = P$. Ceci prouvera la proposition. En effet, d'après la proposition précédente, (E') possède une solution particulière φ_0 qui est un polynôme de degré n si $\alpha + m$ ne s'annule pas ou un polynôme de degré $n+1$ si $\alpha + m$ s'annule. Par conséquent $\psi_0 : I \to \mathbb{K}, t \mapsto \varphi_0 e^{mt}$ est une solution particulière de (E). On a :*

$$\begin{aligned}
& \psi \text{ est solution de } (E) \\
\Rightarrow \quad & \forall t \in I, \quad \psi'(t) + \alpha\psi(t) = P(t)\, e^{mt} \\
\Rightarrow \quad & \forall t \in I, \quad \varphi'(t)\, e^{mt} + m\varphi(t)\, e^{mt} + \alpha\varphi(t)\, e^{mt} = P(t)\, e^{mt} \\
\Rightarrow \quad & \forall t \in I, \quad \varphi'(t) + (\alpha + m)\varphi(t) = P(t) \text{ car } \exp \text{ ne s'annule jamais} \Rightarrow \quad \varphi \text{ est solution de } \left(E'\right)
\end{aligned}$$

Réciproquement, par des calculs analogues, on vérifie facilement que si φ est une solution de (E') alors ψ est une solution de (E).

Remarque 0.7 Cette technique s'appelle un changement de fonction inconnue.

PROPOSITION 0.10
Soient $\eta_1, \eta_2, \alpha, \omega \in \mathbb{R}$ avec $\omega \neq 0$. L'équation

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + \alpha\, y(t) = \boxed{\eta_1 \cos(\omega t) + \eta_2 \sin(\omega t)} \qquad (E)$$

admet une solution particulière sur I de la forme $t \mapsto \mu_1 \cos(\omega t) + \mu_2 \sin(\omega t)$ où $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$.

Démonstration *On démontre le lemme suivant : Si $\forall t \in \mathbb{R}$, $\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) = 0$ (1), alors $\alpha = \beta = 0$. En effet, pour $t = 0$, on a $\alpha = 0$, et pour $t = \frac{\pi}{2\omega}$, $\beta = 0$.*

Soit $\varphi_0 : t \mapsto \mu_1 \cos(\omega t) + \mu_2 \sin(\omega t)$. On a la série d'implications :

$$\begin{array}{rr}
 & \varphi_0 \text{ est solution de } (E) \\
\Rightarrow & \forall t \in I, \quad \varphi_0'(t) + \alpha\, \varphi_0(t) = \eta_1 \cos(\omega t) + \eta_2 \sin(\omega t) \\
\Rightarrow & \forall t \in I, \quad (\mu_1 + \omega\mu_2)\cos(\omega t) + (\mu_2 - \omega\mu_1)\sin(\omega t) = \eta_1 \cos(\omega t) + \eta_2 \sin(\omega t) \\
\Rightarrow & \begin{cases} \mu_1 + \omega\mu_2 & = \eta_1 \\ -\omega\mu_1 + \mu_2 & = \eta_2 \end{cases} \\
\Rightarrow & (\mu_1, \mu_2) \text{ est solution de } \begin{cases} x + \omega y & = \eta_1 - \omega x + y \\ = \eta_2 \end{cases}
\end{array}$$

Réciproquement, si ce système admet un couple solution (μ_1, μ_2) alors $\varphi_0 : t \mapsto \mu_1 \cos(\omega t) + \mu_2 \sin(\omega t)$ est solution de (E).

*Mais le déterminant de ce système est $1 + \omega^2 \neq 0$ et le système possède toujours un couple solution (voir proposition **??** page **??**). L'équation (E) admet donc toujours une solution de la forme indiquée.*

Exemple 0.3 Résolvons sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$y' + y = 2e^x + 4\sin x + 3\cos x.$$

Par application du théorème 0.4, l'équation homogène $y' + y = 0$ admet comme solutions les fonctions $\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \alpha e^{-x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Une solution évidente de $y' + y = 2e^x$ est $y : x \mapsto e^x$.

D'après la proposition 0.10, on peut chercher une solution particulière de $y' + y = 4\sin x + 3\cos x$ sous la forme $\varphi : x \mapsto \alpha\cos x + \beta \sin x$. On vérifie alors que φ est solution de cette équation si et seulement si $\alpha = -1/2$ et $\beta = 7/2$. Par application du principe de superposition, les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto 1/2\cos x + 7/2\sin x + e^x + \alpha e^{-x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Méthode de variation de la constante Soient a, b deux fonctions continues définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Considérons l'équation différentielle : $\forall t \in I, \quad y'(t) + ay(t) = b(t) \quad (E)$. Pour déterminer une solution particulière de (E) :

1. On peut déterminer tout d'abord une solution non nulle de l'équation homogène associée à (E). Une telle solution est de la forme $t \mapsto c\, e^{-A(t)}$ où A est une primitive de a sur I et où $c \in \mathbb{K}^*$.
2. On cherche alors une solution particulière de (E) sous la forme : $\forall t \in I, \quad \psi(t) = c(t)\, e^{-A(t)}$ où c est une fonction dérivable sur I. On a l'équivalence suivante :
   ψ est solution de $(E) \Leftrightarrow \forall t \in I, \quad c'(t)\, e^{-A(t)} = b(t)$.
3. Le calcul de ψ est donc ramené à celui de c, c'est-à-dire à celui d'une primitive de $b\, e^A$ sur I.

Remarque 0.8 Si on fixe t_0 dans I, c est donnée sur I par exemple par :

$$c : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \int_{t_0}^t b(u)\, e^{A(u)}\, \mathrm{d}u \end{cases}$$

et ψ par :

$$\psi : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{K} t \\ & \longmapsto & \left(\int_{t_0}^t b(u)\, e^{A(u)}\, \mathrm{d}u\right) e^{-A(t)} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (E) sur I est donc donné par :

$$S_{\mathbb{K}}(E) = \left\{ t \mapsto \lambda e^{-A(t)} + \int_{t_0}^{t} b\,(u)\, e^{A(u)-A(t)}\ \mathrm{d}u : \quad \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

COROLLAIRE 0.11
Soient a et b deux fonctions continues définies sur I, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Alors il existe une et une seule solution de l'équation différentielle :

$$\forall t \in I, \quad y'\,(t) + a\,(t)\, y\,(t) = b\,(t)$$

vérifiant la condition initiale (t_0, y_0) (c'est-à-dire telle que $y\,(t_0) = y_0$).

Démonstration *Les solutions de (E) sont de la forme $\psi = \varphi_0 + \alpha\varphi$ où :*

- *φ_0 est une solution particulière de (E). Celle-ci existe en vertu de la méthode de variation de la constante.*
- *φ est une solution non nulle (et qui ne s'annule donc jamais) de l'équation homogène associée à (E).*
- *$\alpha \in \mathbb{K}$ est un scalaire.*

$\psi = \varphi_0 + \alpha\varphi$ vérifie la condition initiale (t_0, y_0) si et seulement si $\psi\,(t_0) = y_0$ ou, autrement dit, si et seulement si $\alpha = (y_0 - \varphi_0\,(t_0))\,/\varphi\,(t_0)$ ce qui prouve à la fois l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème de Cauchy.

Exemple 0.4 Résolvons (E) : $\quad y' + 2ty = e^{t-t^2}$. L'équation sans second membre associée à (E) est (E_0) : $\quad y' + 2ty = 0$. La fonction $a : t \mapsto 2t$ est continue sur $\mathbb{R}$ et possède donc une primitive sur $\mathbb{R}$ donnée, par exemple, par $A : t \mapsto t^2$. Par application du théorème fondamental 0.4, les solutions de (E_0) sont les fonctions :

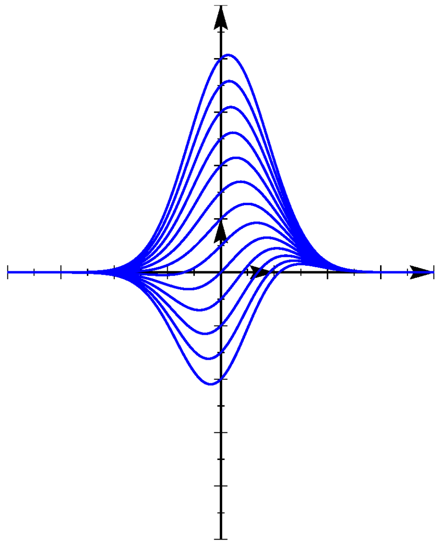
$$\varphi_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha e^{-t^2} \end{array} \right.$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Utilisons la méthode de variation de la constante pour déterminer une solution particulière de (E). Cette solution est de la forme $t \mapsto c\, e^{-t^2}$ où c est une primitive de $t \mapsto b\,(t)\ e^{A(t)} = e^{t-t^2} e^{t^2} = e^t$ sur $\mathbb{R}$. Une telle primitive est $t \mapsto e^t$. Par conséquent $t \mapsto e^t e^{-t^2} = e^{t-t^2}$ est une solution particulière de (E) et les solutions de (E) sont de la forme :

$$t \mapsto \left(e^t + \alpha\right) e^{-t^2}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.



1.3.5 Cas général

On suppose ici que $I =]\alpha, \beta[$ où α et β sont des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $\alpha < \beta$ (on peut avoir $\alpha = -\infty$ ou $\beta = +\infty$). Soient a, b et c trois fonctions continues sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et soit J un sous intervalle de I sur lequel a ne s'annule pas.

On considère l'équation

$$\forall t \in I, \quad a(t)\, y'(t) + b(t)\, y(t) = c(t) \quad (E).$$

Pour tout $t \in J$, on peut normaliser (E) en l'équation

$$\forall t \in J \quad y'(t) + \frac{b(t)}{a(t)} y(t) = \frac{c(t)}{a(t)} \quad (N)$$

Plan 0.1 : $\boxed{\text{Pour résoudre } (E) \text{ sur } (I)}$

1. *On résout l'équation homogène associée à (N) sur les sous-intervalles J de I sur lesquels a ne s'annule pas.*
2. *On cherche une solution particulière de (N), ce qui nous permet de résoudre complètement (N) sur ces sous-intervalles.*
3. — *Toute solution de (E) sur un des sous intervalles J de I sur lequel a ne s'annule pas est solution de (E) sur ce même sous intervalle. On étudie alors comment raccorder ces solutions en un point t_0 où a s'annule. Pour ce faire : si φ_1 est une solution de (E) sur $J_1 =]\alpha', t_0[$ et si φ_2 est solution de (E) sur $J_2 =]t_0, \beta'[$ $(a(t_0) = 0)$, pour que φ_1 et φ_2 se raccordent en t_0, il est nécessaire que :*

   (a) *φ_1 et φ_2 aient une même limite l en t_0.*

(b) La fonction φ définie sur $]\alpha', \beta'[$ par $\varphi_{|I_1} = \varphi_1$, $\varphi_{|I_2} = \varphi_2$ et $\varphi(b) = l$ soit dérivable en b.

— *Il faut par ailleurs vérifier que la fonction φ ainsi construite est bien solution de (E) sur $]\alpha', \beta'[$.*

Exemple 0.5 Résolvons sur $I = \mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E) \quad : \quad \forall t \in I, \quad (1-t)\, y'(t) - y(t) = t$$

Normalisons (E). Nous obtenons l'équation :

$$(N) \quad : \quad \forall t \in I_1 \cup I_2, \quad y'(t) - \frac{1}{1-t} y(t) = \frac{t}{t-1}$$

où $I_1 =]-\infty, 1[$ et $I_2 =]1, +\infty[$. L'équation homogène associée à (N) est :

$$(H) \quad : \quad \forall t \in I_1 \cup I_2, \quad y'(t) - \frac{1}{1-t} y(t) = 0$$

1. Résolvons (H) sur I_1. Posons $a : \left\{ \begin{array}{ccc} I_1 & \longrightarrow & \mathbb{R}t \\ \longmapsto & \frac{1}{1-t} & \end{array} \right.$. On a :

   (a) I_1 est un intervalle de $\mathbb{R}$

   (b) a est continue sur I_1.

   Par application du théorème de résolution des équations différentielles homogènes du premier degré, on peut affirmer que les solutions de (H) sont les fonctions de la forme :

   $$\varphi_{\alpha_1} : \left\{ \begin{array}{ccc} I_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha_1 e^{-A(t)} \end{array} \right.$$

   où A est une primitive de A sur I_1 et où $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. Une telle primitive est donnée, par exemple, par $A : \left\{ \begin{array}{ccc} I_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(|1-t|) \end{array} \right.$. Par conséquent, les solutions de (H) sont de la forme :

   $$\varphi_{\alpha_1} : \left\{ \begin{array}{ccc} I_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\alpha_1}{1-t} \end{array} \right.$$

   où $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. On montre de la même façon que les solutions de (H) sur I_2 sont de la forme

   $$\varphi_{\alpha_2} : \left\{ \begin{array}{ccc} I_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\alpha_2}{1-t} \end{array} \right.$$

   où $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.

2. Par la méthode de variation de la constante, identifions une solution particulière ψ_1 de (N) sur I_1. ψ_1 est de la forme : $\psi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} I_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\lambda(t)}{1-t} \end{array} \right.$ où λ est une primitive de $t \to \frac{t}{1-t} e^{A} = t$. Une telle primitive est donnée, par exemple, par $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ et

   $$\psi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} I_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{t^2}{2} \frac{1}{1-t} \end{array} \right.$$

Les solutions de (N) sur I_1 sont somme de cette solution particulière de (N) et d'une solution générale de l'équation (H) et sont donc de la forme :

$$\zeta_{\alpha_1} : \left\{ \begin{array}{ccc} I_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{t^2}{2}\frac{1}{1-t} + \frac{\alpha_1}{1-t} = \frac{\alpha_1+t^2}{2(1-t)} \end{array} \right.$$

où $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. On prouve de même que les solutions de (N) sur I_2 sont de la forme :

$$\zeta_{\alpha_2} : \left\{ \begin{array}{ccc} I_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{\alpha_2+t^2}{2(1-t)} \end{array} \right.$$

où $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.

3. — Cherchons s'il existe des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$. Supposons qu'un telle solution ζ existe. On doit avoir :
   - — $\zeta_{|I_1}$ doit être solution de (N) sur I_1 et donc il existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in I_1, \quad \zeta_{|I_1}(t) = \zeta_{\alpha_1}(t) = \frac{\alpha_1+t^2}{2(1-t)}$.
   - — $\zeta_{|I_2}$ doit être solution de (N) sur I_2 et donc il existe $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in I_2, \quad \zeta_{|I_2}(t) = \zeta_{\alpha_2}(t) = \frac{\alpha_2+t^2}{2(1-t)}$.
   - — ζ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\zeta_{|I_1}$ doit avoir une limite quand $t \to 1^-$. Ceci n'est possible que si $\alpha_1 = -1$.
   - — De même $\zeta_{|I_2}$ doit avoir une limite quand $t \to 1^+$. Ceci n'est possible que si $\alpha_2 = -1$.
   - — On doit de plus avoir $\lim\limits_{t\to 1^-} \zeta_{|I_1(t)} = \lim\limits_{t\to 1^+} \zeta_{|I_2(t)}$, ce qu'on vérifie facilement. En conclusion, on doit avoir : $\zeta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -\frac{(t+1)}{2} \end{array} \right.$
   - — Enfin, ζ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, il faut vérifier que la fonction que nous venons de construire est bien dérivable en 1, ce qui est ici évident.

   — On vérifie enfin qu'une telle fonction est bien solution de (E) en s'assurant qu'elle vérifie bien (E). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (1-t)\,\zeta'(t) - \zeta(t) &= -\frac{1}{2}(1-t) + \frac{(t+1)}{2} \\ &= t \end{aligned}$$

   La seule solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ est donc ζ.