

Géométrie dans l'espace

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

9 décembre 2021

1 Géométrie dans l'espace



De la même façon que dans le chapitre consacré à la géométrie plane ??, ce chapitre a pour vocations de vous familiariser avec le calcul algébrique et de vous donner des représentations pour les objets étudiés dans les chapitres ?? et ?? d'algèbre linéaire.

Là encore, on pourra passer dans une première lecture les démonstrations qui ne sont pas marquées par un \heartsuit *et se focaliser sur les autres parties.*

Chapeau

1.1 Preamble

PD1(hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (PDFDocEncoding):removing '\numberline'

Dans tout ce chapitre on notera E l'ensemble des points de l'espace et V l'ensemble des vecteurs de l'espace. De la même façon que dans le plan, on peut additionner les vecteurs de l'espace ainsi que les multiplier par des scalaires réels. Pour résumer l'ensemble des propriétés de cette addition et de cette multiplication, qui sont les mêmes que pour les vecteurs du plan, on dit que le triplet $(V, +, \cdot)$ possède une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} .

1.1.1 Combinaisons linéaires de vecteurs, droites et plans dans l'espace

PD1(hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (PDFDocEncoding):removing '\numberline'

definition Droite vectorielle, droite affine *-9pt
itemize

LaTeX Error: Lonely \item—perhaps a missing list environment See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Try typing <return> to proceed. If that doesn't work, type X

<return> to quit. Soit \vec{u} un vecteur non nul de l'espace. On appelle droite vectorielle engendrée (ou dirigée) par \vec{u}

l'ensemble des vecteurs de l'espace colinéaires à \vec{u} $D = \{ \vec{v} \in V \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \vec{v} = \lambda \vec{u} \}$ *LaTeX Error : Command \Delta Aunpointet\Delta = \Delta \vec{u} un vecteur de l'espace. La droite affine passant par le point A = \Delta A et de vecteur directeur \Delta = \Delta \vec{u}*

est l'ensemble des points M de l'espace tel que les vecteurs \vec{AM} et \vec{u} sont colinéaires $D = \{ M \in E \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \vec{AM} = \lambda \vec{u} \}$ *itemize*

definition

remarque Se donnant deux points distincts A et B de l'espace, la droite de l'espace passant par les points A et B est la droite passant par A et dirigée par \vec{AB} . *remarque*

definition Combinaison linéaire de deux vecteurs Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. On dit que \vec{w} est combinaison linéaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} si et seulement si il existe deux réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$. *definition*

definition Plan Vectoriel, plan affine **-9pt*

itemize

LaTeX Error: Lonely \item—perhaps a missing list environment See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Try typing <return> to proceed. If that doesn't work, type X <return> to quit. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non colinéaires de l'espace V. On appelle plan vectoriel engendré (ou dirigé) par les vecteurs \vec{u} et \vec{v}

l'ensemble, noté P, des vecteurs de V qui sont combinaisons linéaires de \vec{u} et \vec{v} $P = \{ \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$. *LaTeX Error : Command invalid in math mode* See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. $\Delta = \Delta \vec{u}$ et $\Delta = \Delta \vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace $\Delta = \Delta V$ et $\Delta = \Delta A \in E$ un point de l'espace. On appelle plan affine engendré

l'ensemble, noté P, des points M de E tels que le vecteur \vec{AM} est combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{v} $P = \{ M \in E \mid \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \vec{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \}$. *itemize*

definition

remarque

itemize

LaTeX Error: Lonely \item—perhaps a missing list environment See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Try typing <return> to proceed. If that doesn't work, type X <return> to quit. Avec les notations précédentes P est l'ensemble des points du plan affine passant par A et engendré par \vec{u} et \vec{v} si et seulement si le vecteur \vec{AM} est l'élément du plan vectoriel engendré par \vec{u} et \vec{v} $P = P$.

LaTeX Error: Lonely \item—perhaps a missing list environment See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Try typing <return> to proceed. If that doesn't work, type X <return> to quit. Le couple (\vec{u}, \vec{v}) forme une base de P.

LaTeX Error: Lonely \item—perhaps a missing list environment See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Try typing <return> to proceed. If that doesn't work, type X <return> to quit. Le triplet (A, \vec{u}, \vec{v}) forme un repère de P.

LaTeX Error: Lonely \item—perhaps a missing list environment See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Try typing <return> to proceed. If that doesn't work, type X <return> to quit. On peut aussi définir un plan affine P en se donnant trois points non alignés A, B et C de E. On définit le plan affine passant par ces trois points comme tant le plan affine passant par A et engendré par les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} . *itemize*

remarque

definition Vecteur normal Un vecteur est dit normal à un plan \mathcal{P} et seulement si il est orthogonal à tous les vecteurs de ce plan. definition

remarque
itemize

LaTeX Error: Lonely \item—perhaps a missing list environment See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Try typing `<return>` to proceed. If that doesn't work, type `X <return>` to quit. Se donner un plan vectoriel revient à se donner un vecteur normal à ce plan.

LaTeX Error: Lonely \item—perhaps a missing list environment See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Try typing `<return>` to proceed. If that doesn't work, type `X <return>` to quit. Se donner un plan affine revient à se donner un vecteur normal à ce plan et un point de ce plan. itemize

remarque

1.1.2 Vecteurs coplanaires, bases

PD1(hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (PDFDocEncoding):removing `'\numberline'`

definition Vecteurs coplanaires Trois vecteurs non nuls sont coplanaires si l'un des trois est linéairement dépendant du plan engendré par les deux autres (ou ce qui est équivalent si l'un des trois est combinaison linéaire des deux autres). definition

remarque En prenant la négation de ce qui précède trois vecteurs sont non coplanaires si et seulement si on ne peut écrire aucun des trois comme combinaison linéaire des deux autres (on dit qu'ils sont linéairement indépendants ou qu'ils forment une famille libre). remarque

definition Base de l'espace Un triplet de vecteurs de $\mathcal{V} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de \mathcal{V} si il est formé de trois vecteurs non coplanaires. definition

proposition Coordonnées d'un vecteur dans une base de l'espace Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de \mathcal{V} . Tout vecteur \vec{x} de \mathcal{V} s'exprime comme une combinaison linéaire unique des 3 vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} c'est-à-dire $\forall x \in \mathcal{V}, \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$. Letriplet $\Delta = \Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ est appelé coordonnées de \vec{x} dans la base $\Delta = \Delta(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. On notera $\vec{x} \mid \text{matrix} \alpha \beta \text{matrix} \gamma$ ou $\vec{x} (\text{matrix} \alpha \beta \gamma \text{matrix})$.

preuve
itemize

LaTeX Error: Lonely \item—perhaps a missing list environment See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Try typing `<return>` to proceed. If that doesn't work, type `X <return>` to quit. Soit \mathcal{P} le plan engendré par \vec{u} et \vec{v} . Soit \vec{m}_0 le projeté du vecteur \vec{m} sur \mathcal{P} parallèlement à \vec{w} . Il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{m} = \vec{m}_0 + \gamma \vec{w}$. Comme \vec{m}_0 est linéairement dépendant du plan engendré par \vec{u} et \vec{v} , il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{m}_0 = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$. Donc $\vec{m} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$.

LaTeX Error: Lonely \item—perhaps a missing list environment See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Try typing `<return>` to proceed. If that doesn't work, type `X <return>` to quit. Ce triplet est unique Si il existe un autre triplet $(\alpha', \beta', \gamma') \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $\vec{m} = \alpha' \vec{u} + \beta' \vec{v} + \gamma' \vec{w}$ alors $(\alpha - \alpha') \vec{u} + (\beta - \beta') \vec{v} + (\gamma - \gamma') \vec{w} = \vec{0}$. Supposons qu'un des trois $\alpha - \alpha', \beta - \beta', \gamma - \gamma'$ ne soit pas nul, par exemple $\alpha - \alpha'$, alors $\vec{u} = \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'} \vec{v} + \frac{\gamma - \gamma'}{\alpha - \alpha'} \vec{w}$ et $\Delta = \Delta(\vec{u})$ est combinaison linéaire de $\Delta = \Delta(\vec{v})$ et $\Delta = \Delta(\vec{w})$, et est donc linéairement dépendant du plan engendré par ces deux vecteurs, ce qui est contradictoire avec notre hypothèse de départ. Letriplet $\Delta = \Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ est donc unique. itemize

preuve
 definition Base orthogonale, orthonormale Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de V . Si les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont deux deux orthogonaux, on dit que la base est orthogonale. Si ils sont de plus unitaires, on dit que est orthonormale. definition

1.1.3 Orientation de l'espace, base orthonormale directe

PD1(hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (PDFDocEncoding):removing '\numberline'

Comme on l'a vu dans le chapitre *geomplan*, il est important, pour pouvoir définir certaines notions sous ou dans certains plans Δ \vec{i} et $\Delta = \Delta \vec{j}$ de l'espace non colinéaires et nommons $\Delta = \Delta P$ le plan vectoriel qu'ils engendrent. Ce plan s'appelle l'espace engendré ΔE_1 et $\Delta = \Delta E_2$. Supposons que chacun de ces deux parties contient un observateur du plan $\Delta = \Delta P$ nommés $\Delta = \Delta O_1$ pour $\Delta = \Delta E_1$ et $\Delta = \Delta O_2$ pour $\Delta = \Delta E_2$. Chacun de ces deux observateurs peut orienter le plan $\Delta = \Delta P$ mais les enstrigonometriques pour $\Delta = \Delta O_1$ correspond à un sens horaire pour $\Delta = \Delta O_2$ et les enstrigonometriques pour $\Delta = \Delta O_1$ correspond à un sens trigonométrique pour $\Delta = \Delta O_2$. L'orientation d'un plan dans l'espace dépend donc de la position de l'observateur.

/home/emmanuel/webapps/les-maths/les-maths/media/serveur_cours/59/orientation_47274e68592b4a118f9a
 /home/emmanuel/webapps/les-maths/les-maths/media/serveur_cours/59/orientation_47274e68592b4a118f9a
 /home/emmanuel/webapps/les-maths/les-maths/media/serveur_cours/59/orientation_47274e68592b4a118f9a
 /home/emmanuel/webapps/les-maths/les-maths/media/serveur_cours/59/orientation_47274e68592b4a118f9a
 /home/emmanuel/webapps/les-maths/les-maths/media/serveur_cours/59/orientation_47274e68592b4a118f9a
 /home/emmanuel/webapps/les-maths/les-maths/media/serveur_cours/59/orientation_47274e68592b4a118f9a
 /home/emmanuel/webapps/les-maths/les-maths/media/serveur_cours/59/orientation_47274e68592b4a118f9a
 /home/emmanuel/webapps/les-maths/les-maths/media/serveur_cours/59/orientation_47274e68592b4a118f9a
 LaTeX Warning: File '/home/emmanuel/webapps/les-maths/les-maths/media/serveur_cours/59/orientation_47274e68592b4a118f9a' not found.

Il existe plusieurs règles mnémotechniques pour fixer une orientation de l'espace. Parmi celles-ci, donnons celle dite du bonhomme d'ampère.

Considérons $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace. Soient I, J, K des points de l'espace tels que $\vec{OI} = \vec{i}$, $\vec{OJ} = \vec{j}$, $\vec{OK} = \vec{k}$. On considère un observateur placé les pieds en O , la tête en K et qui a le point I devant lui.

Par convention, on dit que
 itemize