Géométrie dans l'espace

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

26 novembre 2021

1 Géométrie dans l'espace

De la même façon que dans le chapitre consacré à la géométrie plane **??**, ce chapitre a pour vocations de vous familiariser avec le calcul algébrique et de vous donner des représentations pour les objets étudiés dans les chapitres **??** et **??** d'algèbre linéaire.

Là encore, on pourra passer dans une première lecture les démonstrations qui ne sont pas marquées par un $\heartsuit etsefocalisersurlesautresparties.$

Chapeau

1.1 Prambule

PD1(hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (PDFDocEncoding):removing '\numberline'

Dans tout ce chapitre on notera ´=´El'ensemble des points de l'espace et ´=´Vl'ensemble des vecteurs de l'espace.De la mme faon que dans le plan, on peut additionner les vecteurs de l'espace ainsi que les multiplier par des scalaires rels. Pour rsumer l'ensemble des proprits de cette addition et de cette multiplication, qui sont les mmes que pour les vecteurs du plan, on dit que le triplet ´=´(V,+,.)possde une structure d'espace vectoriel sur ´=´R.

1.1.1 Combinaisons linaires de vecteurs, droites et plans dans l'espace

PD1(hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (PDFDocEncoding):removing '\numberline'

definitionDroite vectorielle, droite affine *-9pt
itemize

LaTeX Error: Lonely \item–perhaps a missing list environmentSee the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation.Try typing <return> to proceed.If that doesn't work, type X

<return> to quit.Soit ´=´$\overrightarrow{u}$un vecteur non nul de l'espace. On appelle droite vectorielle engendre (ou dirige) par ´=´$\overrightarrow{u}$

l'ensemble ´=´Ddes vecteurs de l'espaces colinaires ´=´$\overrightarrow{u}$ D=$\{\overrightarrow{v} \in V | \exists \lambda \in R \quad \overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}\}$ $LaTeXError: Command$
$\Delta A unpointet \Delta = \Delta \overrightarrow{u} unvecteurdel'espace.Ladroiteaffinepassantparlepoint \Delta = \Delta A etdevecteurdirecteur \Delta = \Delta \overrightarrow{u}$

est l'ensemble ´=´Ddes points ´=´Mde l'espace tel que les vecteurs ´=´$\overrightarrow{AM}$et ´=´$\overrightarrow{u}$sont colinaires D=$\left\{M \in E | \exists \lambda \in R \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}\right\} itemize$

definition

remarque Se donnant deux points distincts ´=´Aet ´=´Bde l'espace, la droite de l'espace passant par les points ´=´Aet ´=´Best la droite passant par ´=´Aet dirige par ´=´$\overrightarrow{AB}$. remarque

definitionCombinaison linaire de deux vecteurs Soient ´=´$\overrightarrow{u}$, ´=´$\overrightarrow{v}$et ´=´$\overrightarrow{w}$trois vecteurs de l'espace. On dit que ´=´$\overrightarrow{w}$est combinaison linaire des vecteurs ´=´$\overrightarrow{u}$et ´=´$\overrightarrow{v}$si et seulement si il existe deux rels ´=´$\alpha, \beta \in R$tels que ´=´$\overrightarrow{w} = \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{w}$. definition

definitionPlan Vectoriel, plan affine *-9pt

itemize

¿ LaTeX Error: Lonely \item–perhaps a missing list environmentSee the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation.Try typing <return> to proceed.If that doesn't work, type X <return> to quit.Soient ´=´$\overrightarrow{u}$et ´=´$\overrightarrow{v}$deux vecteurs non colinaires de l'espace ´=´V. On appelle plan vectoriel engendr (ou dirig) par les vecteurs ´=´$\overrightarrow{u}$et ´=´$\overrightarrow{v}$

l'ensemble, not ´=´P, des vecteurs de ´=´Vqui sont combinaisons linaires de ´=´$\overrightarrow{u}$et ´=´$\overrightarrow{v}$ P=$\{\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v} | \alpha, \beta \in R\} .LaTeXError: CommandinvalidinmathmodeSeetheLaTeXmanualorLaTeXCompanionfor$
$\Delta \overrightarrow{u} et \Delta = \Delta \overrightarrow{v} deuxvecteursnoncolinairesdel'espace \Delta = \Delta V et \Delta = \Delta A \in Eunpointdel'espace.Onappelleplanaffineen$

l'ensemble, not ´=´P, des points ´=´Mde ´=´Etels que le vecteur ´=´$\overrightarrow{AM}$est combinaison linaire de ´=´$\overrightarrow{u}$et ´=´$\overrightarrow{v}$ P=$\left\{M \in E | \exists\left(\alpha, \beta\right) \in R^2 \quad \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}\right\} .itemize$

definition

remarque

itemize

¿ LaTeX Error: Lonely \item–perhaps a missing list environmentSee the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation.Try typing <return> to proceed.If that doesn't work, type X <return> to quit.Avec les notations prcdentes ´=´Mest lment du plan affine passant par ´=´Aet engendr par ´=´$\overrightarrow{u}$et ´=´$\overrightarrow{v}$si et seulement si le vecteur ´=´$\overrightarrow{AM}$est lment du plan vectoriel engendr par ´=´$\overrightarrow{u}$et ´=´$\overrightarrow{v}$ ´=´P.

¿ LaTeX Error: Lonely \item–perhaps a missing list environmentSee the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation.Try typing <return> to proceed.If that doesn't work, type X <return> to quit.Le couple ´=´$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$forme une base de ´=´P.

¿ LaTeX Error: Lonely \item–perhaps a missing list environmentSee the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation.Try typing <return> to proceed.If that doesn't work, type X <return> to quit.Le triplet ´=´$(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$forme un repre de ´=´P.

¿ LaTeX Error: Lonely \item–perhaps a missing list environmentSee the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation.Try typing <return> to proceed.If that doesn't work, type X <return> to quit.On peut aussi dfinir un plan affine ´=´Pen se donnant trois points non aligns ´=´A, ´=´Bet ´=´Cde ´=´E. On dfinit le plan affine passant par ces trois points comme tant le plan affine passant par ´=´Aet engendr par les vecteurs ´=´$\overrightarrow{AB}$et ´=´$\overrightarrow{AC}$. itemize

remarque

definitionVecteur normal Un vecteur est dit normal un plan ´=´Psi et seulement si il est orthogonal tous les vecteurs de ce plan. definition

remarque

itemize

¿ LaTeX Error: Lonely \item–perhaps a missing list environmentSee the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation.Try typing <return> to proceed.If that doesn't work, type X <return> to quit.Se donner un plan vectoriel revient se donner un vecteur normal ce plan.

¿ LaTeX Error: Lonely \item–perhaps a missing list environmentSee the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation.Try typing <return> to proceed.If that doesn't work, type X <return> to quit.Se donner un plan affine revient se donner un vecteur normal ce plan et un point de ce plan. itemize

remarque

1.1.2 Vecteurs coplanaires, bases

PD1(hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (PDFDocEncoding):removing '\numberline'

definitionVecteurs coplanaires Trois vecteurs non nuls sont coplanaires si l'un des trois est lment du plan engendr par les deux autres (ou ce qui est quivalent si l'un de trois est combinaison linaire des deux autres). definition

remarque En prenant la ngation de ce qui prcde trois vecteurs sont non coplanaires si et seulement si on ne peut crire aucun des trois comme combinaison linaire des deux autres (on dit qu'ils sont linairement indpendants ou qu'ils forment une famille libre). remarque

definitionBase de l'espace Un triplet de vecteurs de ´=´V ´=´$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$est une base de ´=´Vsi il est form de trois vecteurs non coplanaires. definition

propositionCoordonnes d'un vecteur dans une base de l'espace Soit ´=´$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$une base de ´=´V. Tout vecteur ´=´$\overrightarrow{x}$de ´=´Vs'exprime comme une combinaison linaire unique des ´=´3vecteurs ´=´$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$et ´=´$\overrightarrow{w}$c'est--dire $\forall x \in V, \quad \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in R^3 \quad \overrightarrow{x} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} Letriplet\Delta = \Delta(\alpha,\beta,\gamma) estappelcoordonnesde\Delta = \Delta\overrightarrow{x} danslabase\Delta = \Delta\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}).Onnotera\overrightarrow{x} |matrix\alpha\beta matrix\gamma ou\overrightarrow{x} (matrix\alpha\beta m$

preuve

itemize

¿ LaTeX Error: Lonely \item–perhaps a missing list environmentSee the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation.Try typing <return> to proceed.If that doesn't work, type X <return> to quit.Soit ´=´Ple plan engendr par ´=´$\overrightarrow{u}$et ´=´$\overrightarrow{v}$. Soit ´=´$\overrightarrow{m_0}$le projet du vecteur ´=´$\overrightarrow{m}$sur ´=´Pparalllement ´=´$\overrightarrow{w}$. Il existe ´=´$\gamma \in R$tel que ´=´$\overrightarrow{m} = \overrightarrow{m_0} + \gamma\overrightarrow{w}$. Comme ´=´$\overrightarrow{m_0}$est lment du plan engendr par ´=´$\overrightarrow{u}$et ´=´$\overrightarrow{v}$, il existe ´=´$(\alpha,\beta) \in R^2$tel que ´=´$\overrightarrow{m_0} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$. Donc ´=´$\overrightarrow{m} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w}$.

¿ LaTeX Error: Lonely \item–perhaps a missing list environmentSee the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation.Try typing <return> to proceed.If that doesn't work, type X <return> to quit.Ce triplet est unique Si il existe un autre triplet ´=´$(\alpha',\beta',\gamma') \in R^3$vrifiant ´=´$\overrightarrow{m} = \alpha'\overrightarrow{u} + \beta'\overrightarrow{v} + \gamma'\overrightarrow{w}$alors ´=´$(\alpha-\alpha')\overrightarrow{u} + (\beta-\beta')\overrightarrow{v} + (\gamma-\gamma')\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$. Supposons qu'un des trois ´=´$\alpha-\alpha'$, ´=´$\beta-\beta'$, ´=´$\gamma-\gamma'$ne soit pas nul, par exemple ´=´$\alpha-\alpha'$, alors $\overrightarrow{u} = {\scriptstyle \beta-\beta' over \alpha-\alpha'}\overrightarrow{v} + {\scriptstyle \gamma-\gamma' over \alpha-\alpha'}\overrightarrow{w} et\Delta = \Delta\overrightarrow{u} estcombinaisonlinairede\Delta = \Delta\overrightarrow{v} et\Delta = \Delta\overrightarrow{w}, etestdonclmentduplanengendrparcesdeuxvecteurs, cequiestcontradictoireavecnotrehypothsededpart.Letriplet\Delta = \Delta(\alpha,\beta,\gamma) estdoncunique.itemize$

preuve

definitionBase orthogonale, orthonormale Soit ´=´B($\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$)une base de ´=´V. Si les vecteurs ´=´$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$sont deux deux orthogonaux, on dit que la base ´=´Best orthogonale. Si ils sont de plus unitaires, on dit que ´=´Best orthonormale. definition

1.1.3 Orientation de l'espace, base orthonormale directe

PD1(hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (PDFDocEncoding):removing '\numberline'

Comme on l'a vu dans le chapitre geom$_{p}lan, ilestimportant, pourpouvoirdfinircertainesnotionsoursoudrecertainspr$
$\Delta\overrightarrow{i}et\Delta=\Delta\overrightarrow{j}del'espacenoncolinairesetnommons\Delta=\Delta Pleplanvectorielqu'ilsengendrent.Ceplansparel'espaceendeu$
$\Delta E_1 et\Delta=\Delta E_2.Supposonsquechacunedecesdeuxpartiescontientunobservateurduplan\Delta=\Delta Pnomm\Delta=$
$\Delta O_1 pour\Delta=\Delta E_1 et\Delta=\Delta O_2 pour\Delta=\Delta E_2.Chacundecesdeuxobservateurspeutorienterleplan\Delta=$
$\Delta Pmaislesenstrigonomtriquepour\Delta=\Delta O_1 correspondausenshorairepour\Delta=\Delta O_2 etlesenshorairepour\Delta=$
$\Delta O_1 correspondausenstrigonomtriquepour\Delta=\Delta O_2.L'orientationd'unplandansl'espacedpenddoncdelapositiond'oonl'o$

/home/emmanuel/webapps/les-maths/les-maths/media/serveur_cours/59/orientation____47274e68592b4a118f9a

/home/emmanuel/webapps/les-maths/les-maths/media/serveur_cours/59/orientation____47274e68592b4a118f9a

/home/emmanuel/webapps/les-maths/les-maths/media/serveur_cours/59/orientation____47274e68592b4a118f9a

/home/emmanuel/webapps/les-maths/les-maths/media/serveur_cours/59/orientation____47274e68592b4a118f9a

/home/emmanuel/webapps/les-maths/les-maths/media/serveur_cours/59/orientation____47274e68592b4a118f9a

/home/emmanuel/webapps/les-maths/les-maths/media/serveur_cours/59/orientation____47274e68592b4a118f9a

/home/emmanuel/webapps/les-maths/les-maths/media/serveur_cours/59/orientation____47274e68592b4a118f9a

LaTeX Warning: File '/home/emmanuel/webapps/les-maths/les-maths/media/serveur$_{c}ours/59/orientation$

$_{4}7274e68592$

Il existe plusieurs rgles mnmotechniques pour fixer une orientation de l'espace. Parmi celles ci, donnons celle dite du bonhomme d'ampre .

Considrons ´=´(O,$\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$)$k$un repre orthonormal de l'espace. Soient ´=´I, ´=´Jet ´=´Kdes points de ´=´Etels que ´=´$\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{i}$, ´=´$\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{j}$, ´=´$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{k}$. On considre un observateur plac les pieds en ´=´O, la tte en ´=´Ket qui a le point ´=´Idevant lui.

Par convention, on dit que

itemize