

# Géométrie dans l'espace

Emmanuel Vieillard-Baron<sup>1</sup>, Alain Soyeur<sup>2</sup>, and François Capaces<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

<sup>2</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

<sup>3</sup>, ,

11 août 2023

## 1 Géométrie dans l'espace



De la même façon que dans le chapitre consacré à la géométrie plane ??, ce chapitre a pour vocations de vous familiariser avec le calcul algébrique et de vous donner des représentations pour les objets étudiés dans les chapitres ?? et ?? d'algèbre linéaire.

Là encore, on pourra passer dans une première lecture les démonstrations qui ne sont pas marquées par un  $\heartsuit$  *et se focaliser sur les autres parties.*

Chapeau

### 1.1 Preamble

PD1(hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (PDFDocEncoding):removing '\numberline'

Dans tout ce chapitre on notera  $E$  l'ensemble des points de l'espace et  $V$  l'ensemble des vecteurs de l'espace. De la même façon que dans le plan, on peut additionner les vecteurs de l'espace ainsi que les multiplier par des scalaires réels. Pour résumer l'ensemble des propriétés de cette addition et de cette multiplication, qui sont les mêmes que pour les vecteurs du plan, on dit que le triplet  $(V, +, \cdot)$  possède une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

#### 1.1.1 Combinaisons linéaires de vecteurs, droites et plans dans l'espace

PD1(hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (PDFDocEncoding):removing '\numberline'

definition Droite vectorielle, droite affine \*-9pt  
itemize

LaTeX Error: Lonely \item—perhaps a missing list environment See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Try typing <return> to proceed. If that doesn't work, type X

<return> to quit. Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul de l'espace. On appelle droite vectorielle engendrée (ou dirigée) par  $\vec{u}$

l'ensemble  $D$  des vecteurs de l'espace colinéaires à  $\vec{u}$  :  $D = \{ \vec{v} \in V \mid \exists \lambda \in R \quad \vec{v} = \lambda \vec{u} \}$  *LaTeX Error : Command  $\Delta$  Aun point  $\Delta = \Delta \vec{u}$  un vecteur de l'espace. La droite affine passant par le point  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$  est l'ensemble*

des points  $M$  de l'espace tel que les vecteurs  $\vec{AM}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires :  $D = \{ M \in E \mid \exists \lambda \in R \quad \vec{AM} = \lambda \vec{u} \}$  *itemize*

definition

remarque Se donnant deux points distincts  $A$  et  $B$  de l'espace, la droite de l'espace passant par les points  $A$  et  $B$  est la droite passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{AB}$ . *remarque*

definition Combinaison linéaire de deux vecteurs Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace. On dit que  $\vec{w}$  est combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  si et seulement si il existe deux réels  $\alpha, \beta \in R$  tels que  $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ . *definition*

definition Plan Vectoriel, plan affine *\*-9pt*

itemize

LaTeX Error: Lonely \item—perhaps a missing list environment See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Try typing <return> to proceed. If that doesn't work, type X <return> to quit. Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires de l'espace  $V$ . On appelle plan vectoriel engendré (ou dirigé) par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$

l'ensemble, noté  $P$ , des vecteurs de  $V$  qui sont combinaisons linéaires de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :  $P = \{ \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \mid \alpha, \beta \in R \}$ . *LaTeX Error : Command invalid in math mode See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation.  $\Delta \vec{u}$  et  $\Delta = \Delta \vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires de l'espace  $\Delta = \Delta V$  et  $\Delta = \Delta A \in E$  un point de l'espace. On appelle plan affine engendré*

l'ensemble, noté  $P$ , des points  $M$  de  $E$  tels que le vecteur  $\vec{AM}$  est combinaison linéaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :  $P = \{ M \in E \mid \exists (\alpha, \beta) \in R^2 \quad \vec{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \}$ . *itemize*

definition

remarque

itemize

LaTeX Error: Lonely \item—perhaps a missing list environment See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Try typing <return> to proceed. If that doesn't work, type X <return> to quit. Avec les notations précédentes  $M$  est l'élément du plan affine passant par  $A$  et engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  si et seulement si le vecteur  $\vec{AM}$  est l'élément du plan vectoriel engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :  $M \in P$ .

LaTeX Error: Lonely \item—perhaps a missing list environment See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Try typing <return> to proceed. If that doesn't work, type X <return> to quit. Le couple  $(\vec{u}, \vec{v})$  forme une base de  $P$ .

LaTeX Error: Lonely \item—perhaps a missing list environment See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Try typing <return> to proceed. If that doesn't work, type X <return> to quit. Le triplet  $(A, \vec{u}, \vec{v})$  forme un repère de  $P$ .

LaTeX Error: Lonely \item—perhaps a missing list environment See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Try typing <return> to proceed. If that doesn't work, type X <return> to quit. On peut aussi définir un plan affine  $P$  en se donnant trois points non alignés  $A$ ,  $B$  et  $C$  de  $E$ . On définit le plan affine passant par ces trois points comme tant le plan affine passant par  $A$  et engendré par les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ . *itemize*

remarque

definition Vecteur normal Un vecteur est dit normal à un plan  $\mathcal{P}$  et seulement si il est orthogonal à tous les vecteurs de ce plan. definition

remarque  
itemize

LaTeX Error: Lonely \item—perhaps a missing list environment See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Try typing `<return>` to proceed. If that doesn't work, type `X <return>` to quit. Se donner un plan vectoriel revient à se donner un vecteur normal à ce plan.

LaTeX Error: Lonely \item—perhaps a missing list environment See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Try typing `<return>` to proceed. If that doesn't work, type `X <return>` to quit. Se donner un plan affine revient à se donner un vecteur normal à ce plan et un point de ce plan. itemize

remarque

### 1.1.2 Vecteurs coplanaires, bases

PD1(hyperref) Package hyperref Warning: Token not allowed in a PDF string (PDFDocEncoding):removing `'\numberline'`

definition Vecteurs coplanaires Trois vecteurs non nuls sont coplanaires si l'un des trois est linéairement dépendant du plan engendré par les deux autres (ou ce qui est équivalent si l'un des trois est combinaison linéaire des deux autres). definition

remarque En prenant la négation de ce qui précède trois vecteurs sont non coplanaires si et seulement si on ne peut écrire aucun des trois comme combinaison linéaire des deux autres (on dit qu'ils sont linéairement indépendants ou qu'ils forment une famille libre). remarque

definition Base de l'espace Un triplet de vecteurs de  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est une base de  $\mathcal{V}$  si il est formé de trois vecteurs non coplanaires. definition

proposition Coordonnées d'un vecteur dans une base de l'espace Soit  $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  une base de  $\mathcal{V}$ . Tout vecteur  $\vec{x}$  de  $\mathcal{V}$  s'exprime comme une combinaison linéaire unique des 3 vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  c'est-à-dire  $\forall x \in \mathcal{V}, \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$  Letriplett  $\Delta = \Delta(\alpha, \beta, \gamma)$  est appelé coordonnées de  $\vec{x}$  dans la base  $\Delta = \Delta(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ . On notera  $\vec{x} \mid \text{matrix} \alpha \beta \text{matrix} \gamma$  ou  $\vec{x}(\text{matrix} \alpha \beta \gamma \text{matrix})$

preuve  
itemize

LaTeX Error: Lonely \item—perhaps a missing list environment See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Try typing `<return>` to proceed. If that doesn't work, type `X <return>` to quit. Soit  $\mathcal{P}$  le plan engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Soit  $\vec{m}_0$  le projeté du vecteur  $\vec{m}$  sur  $\mathcal{P}$  parallèlement à  $\vec{w}$ . Il existe  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{m} = \vec{m}_0 + \gamma \vec{w}$ . Comme  $\vec{m}_0$  est linéairement dépendant du plan engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\vec{m}_0 = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ . Donc  $\vec{m} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$ .

LaTeX Error: Lonely \item—perhaps a missing list environment See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Try typing `<return>` to proceed. If that doesn't work, type `X <return>` to quit. Ce triplet est unique Si il existe un autre triplet  $\mathcal{B}' = (\alpha', \beta', \gamma') \in \mathbb{R}^3$  vérifiant  $\vec{m} = \alpha' \vec{u} + \beta' \vec{v} + \gamma' \vec{w}$  alors  $(\alpha - \alpha') \vec{u} + (\beta - \beta') \vec{v} + (\gamma - \gamma') \vec{w} = \vec{0}$ . Supposons qu'un des trois  $\alpha - \alpha', \beta - \beta', \gamma - \gamma'$  ne soit pas nul, par exemple  $\alpha - \alpha'$ , alors  $\vec{u} = \frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'} \vec{v} + \frac{\gamma - \gamma'}{\alpha - \alpha'} \vec{w}$  et  $\Delta = \Delta(\vec{u})$  est combinaison linéaire de  $\Delta = \Delta(\vec{v})$  et  $\Delta = \Delta(\vec{w})$ , et est donc linéairement dépendant du plan engendré par ces deux vecteurs, ce qui est contradictoire avec notre hypothèse de départ. Letriplett  $\Delta = \Delta(\alpha, \beta, \gamma)$  est donc unique. itemize

