Quelques résultats inclassables

Christophe Antonini[1], Olivier Teytaud[2], Pierre Borgnat[3], Annie Chateau[4], and Edouard Lebeau[5]

[1]Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes
[2]Chargé de rechercher INRIA, Université d'Orsay, Orsay
[3]Chargé de recherche CNRS, ENS Lyon, Lyon
[4]Maitre de conférence, Université Montpellier-2, Montpellier
[5]Enseignant en CPGE, Lycée Henri Poincaré, Nancy

14 octobre 2022

Bonus...

1 Quelques résultats inclassables

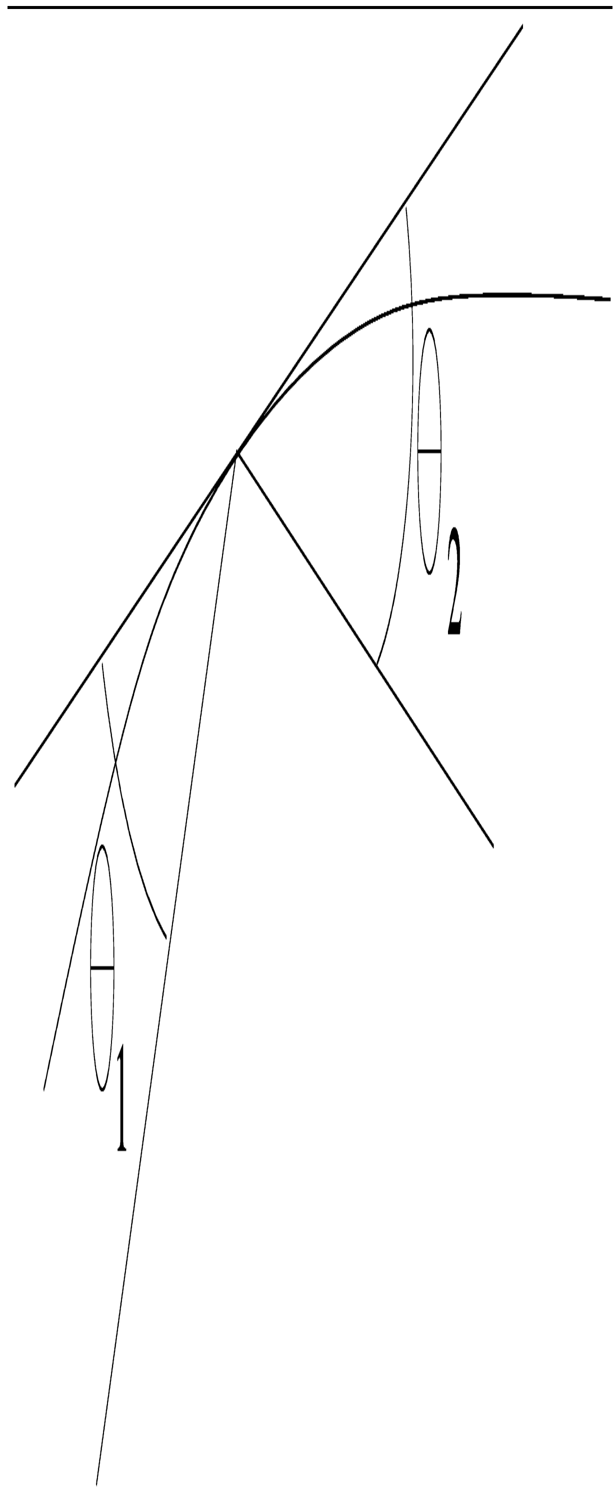
1.1 Les billards strictement convexes

Proposition 0.1

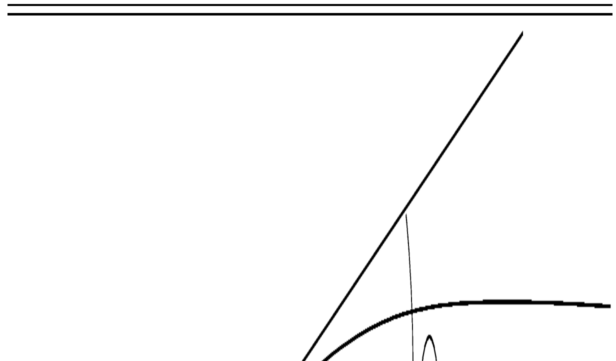
Soit K un ensemble strictement convexe de $\mathbb{R}^2$; on suppose que par tout point de la frontière de K il passe une unique tangente à K. On définit une trajectoire périodique de période n par la donnée de n points $a_0, \dots, a_{n-1}$ de la frontière de K tels que pour tout $i \in [0, n-1]$ $\theta_i = \theta_{i+1}$ (voir figure **??**) en notant $a_n = a_0$.

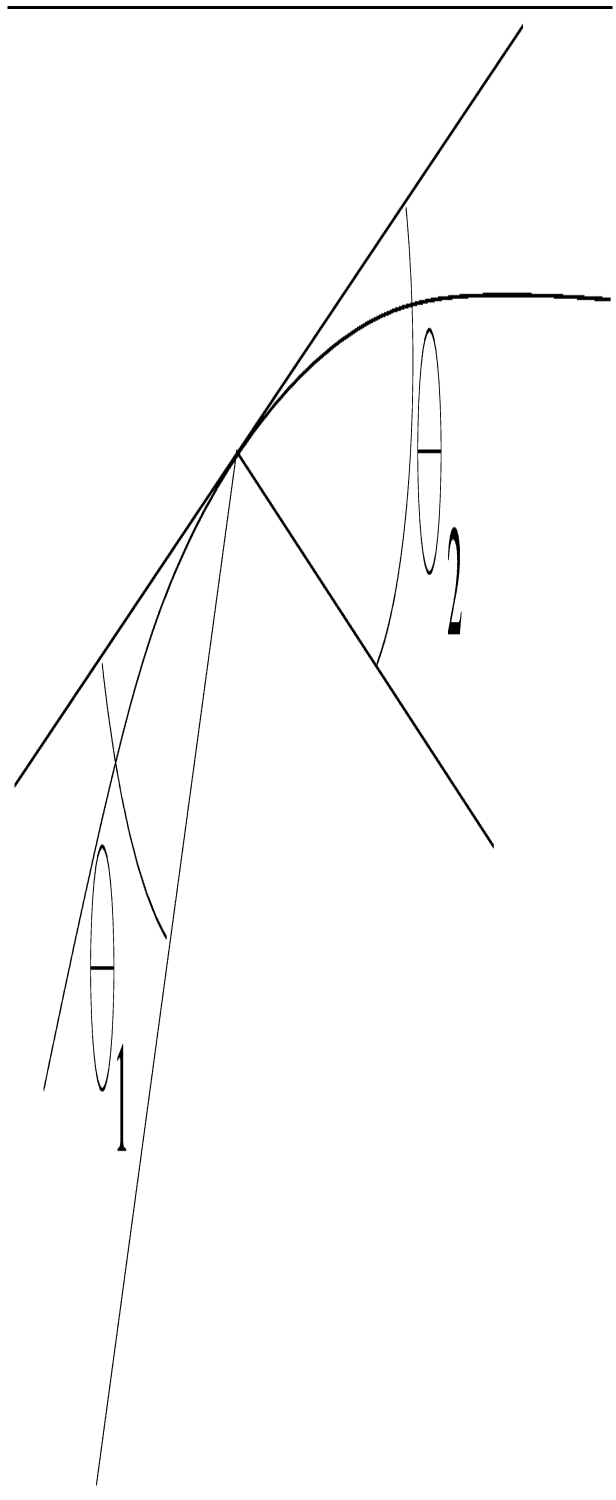
Alors pour tout $n \geq 2$ il existe des trajectoires périodiques de période n.

Apllication Ce résultat permet de montrer que parcourir un ensemble strictement convexe par billard ne conduit pas forcément à bien remplir l'espace. Cela dit, on fait souvent néanmoins des parcours d'espaces par des techniques de billard, par exemple pour calculer leur centre de gravité en moyennant les trajectoires (ce qui est par exemple utile en apprentissage bayésien), mais ce résultat montre que l'on peut très mal tomber si l'on est parti d'un mauvais point initial et dans une mauvaise direction. Mais on montre aussi que, si l'on part d'un point au hasard (uniformément) et dans une direction non moins uniforme, et dans certains cas dits "billards ergodiques", les choses se passent bien (mais il reste beaucoup à prouver quant à ce sujet pour que la discussion soit close).



θ_2
θ_1





Θ_2
Θ_1

Démonstration

•*On se donne* $n \geq 2$*.*

•*Notons* δK *la frontière de* K*.*

•*On considère l'ensemble*

$$K = \{(a_0, \ldots, a_{n-1} / \forall i a_i \in \delta K\}$$

•*On définit* $f : K \to \mathbb{R}$ *défini par*

$$f(a) = \sum_{i=0}^{n-1} |a_i - a_{i-1}|$$

($|.|$ *désigne ici la norme euclidienne)*

•f *est* C^0 *(par inégalité triangulaire)*

•K *est compact (comme produit de compacts - s'agissant d'un produit fini d'espaces métriques il n'est pas nécessaire d'invoquer Tykhonovi, voir le paragraphe suivant le théorème* **??***).*

•f *atteint son maximum sur* K*.*

•*Ce maximum vérifie la propriété énoncée, comme le lecteur le vérifiera aisément.*

1.2 Deux élégantes inégalités géométriques

On s'inspire ici de [**?**].

1.2.1 Inégalité isopérimétrique

LEMME 0.2

On se donne Γ une fonction C^1 de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$. On suppose $\int_0^1 \Gamma = 0$. Alors

$$4\Pi^2 \int_0^1 |\Gamma|^2 \leq \int_0^1 |\Gamma'|^2$$

et il n'y a égalité que si Γ est une combinaison linéaire de $e^{2i\Pi x}$ et $e^{-2i\Pi x}$.

Démonstration *On procède comme suit :*

•*On considère* Γ *sur* $[0, 1[$*, et on considère sa série de Fourier.*

$$\Gamma(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\Pi n x}$$

•*On applique Parseval (théorème* **??***) ;*

$$\int_0^1 |\Gamma|^2 = \sum_n c_n^2$$

•*On applique Parseval à la dérivée de* Γ*,* $\Gamma'(x) = 2i\Pi \sum_n n c_n e^{2i\Pi n x}$

$$\int_0^1 |\Gamma'|^2 = 4\Pi^2 \sum_n (n c_n)^2$$

•*On sait que* $c_0 = 0$*, car* $\int_0^1 \Gamma = 0$*.*

•*On a donc l'inégalité souhaitée, et le cas d'égalité.*

THÉORÈME 0.3 **Inégalité isopérimétrique**

La courbe C^1 fermée du plan qui à longueur donnée délimite une aire maximale est le cercle.

Démonstration

•*On se donne une courbe fermée C^1 Γ.*

•*Quitte à reparamétrer, on suppose que Γ' est constant.*

•*Quitte à translater Γ on suppose que $\int \Gamma = 0$.*

•*On applique alors le théorème de Green-Riemann, qui affirme que l'aire A est donnée par la formule*

$$A = \frac{1}{2} \int xy' - x'y$$

avec $\Gamma = x + iy$, et x et y à valeurs réelles.

•*Or*

$$\int \Gamma\overline{\Gamma'} = \int (x+iy).(x'-iy')$$
$$= \int xx' + yy' + iyx' - iy'x$$

or $\int xx' = \int yy' = 0$ par périodicité donc

$$\int \Gamma\overline{\Gamma'} = i \int yx' - y'x$$

et donc

$$2A \leq \sqrt{\int |\Gamma|^2}\sqrt{\int |\Gamma'|^2}$$
$$\leq \int |\Gamma'|^2$$

grâce au lemme précédent. Or Γ' étant constant, on obtient

$$A \leq \frac{l^2}{2\Pi}$$

avec l la longueur de l'arc.

•*Il y a égalité si et seulement si l'inégalité de Cauchy-Schwarz est en fait une égalité, et donc si et seulement si on a non seulement tous les c_i nuls sauf c_1 et c_{-1}, mais aussi Γ et Γ' liés ; la famille $(x \mapsto e^{2i\Pi x}, x \mapsto e^{-2i\Pi x})$ étant libre, on constate que les solutions se trouvent pour un des deux coefficients c_1 et c_{-1} nul.*

1.2.2 Inégalité isodiamétrique

On considère l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure usuelle d'espace euclidien, et de la mesure de Lebesgue.

THÉORÈME 0.4

Quel que soit K compact de $\mathbb{R}^n$ de mesure finie, $\mu(K) \leq \mu(B(0, \delta(K)/2))$, avec $\delta(E)$ pour E une partie de $\mathbb{R}^n$ le diamètre de E, c'est-à-dire le sup des distances entre deux points de E.

Intuition Cela revient à dire que le plus grand volume possible à diamètre donné est celui d'une boule.

Nous aurons besoin de la définition suivante :

DÉFINITION 0.1 **symétrisé de Steiner**

Etant donné K un compact de $\mathbb{R}^n$, on appelle **symétrisé de Steiner** de K par rapport à l'hyperplan P l'ensemble

$$S_P(K) = \{x = p + tu / p \in P \wedge K \cap D(p,u) \cap K \neq 0 \wedge |t| \leq \mu'(K \cap D(p,u)\}$$

où u désigne un vecteur directeur unitaire de la droite orthogonale à P, et où $D(p,u)$ désigne la droite de vecteur unitaire u passant par p.

μ' désigne la mesure de Lebesgue sur la droite $D(p,u)$.

LEMME 0.5 **Première propriété fondamentale du symétrisé de Steiner**

Quel que soit K compact et P hyperplan, $S_P(K)$ a même mesure que K.

Démonstration *Il suffit de considérer le théorème de Fubini, appliqué à la fonction caractéristique de K, pour voir que l'intégrale est l'intégrale sur $p \in P$ de la mesure $\mu'(K \cap L(p,u))$.*

LEMME 0.6 **Deuxième propriété fondamentale du symétrisé de Steiner**

Quel que soit K compact et P hyperplan, $S_P(K)$ a un diamètre inférieur ou égal à celui de K.

Démonstration *On considère deux points x et y de $S_P(K)$, à une distance d l'un de l'autre ; on cherche à montrer qu'il existe deux points x' et y' de K à distance supérieure ou égale à d.*

•*On note x_P et y_P les projetés orthogonaux de x et y sur P.*

•*On note l_x et l_y les mesures de $K \cap D(x,u)$ et $K \cap D(y,u)$.*

•*On note d' la distance entre x_P et y_P.*

•*d^2 est majorée par $d'^2 + (l_x/2)^2 + (l_y/2)^2$.*

•*On note L_x et L_y les <u>diamètres</u> de $S_P(K) \cap D(x,u)$ et $S_P(K) \cap D(y,u)$.*

•*Il est clair que $L_x \geq l_x$ et que $L_y \geq l_y$. Une étude de cas montre rapidement qu'en considérant les points extrémaux x_1, x_2, y_1 et y_2 de $S_P(K) \cap D(x,u)$ et $S_P(K) \cap D(y,u)$ respectivement, l'une des distances $d(x_i,y_i)$ est supérieure ou égale à $\sqrt{d'^2 + (L_x/2)^2 + (L_y/2)^2}$.*

On a encore besoin d'un nouveau lemme :

LEMME 0.7 **Symétrisation d'un compact de $\mathbb{R}^n$**

On note $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et P_1, ..., P_n les hyperplans orthogonaux aux e_i passant par 0. On se donne K un compact de $\mathbb{R}^n$.

Alors $S_{P_1} \circ S_{P_2} \circ S_{P_3} \circ \cdots \circ S_{P_n}(K)$ est stable par $x \mapsto -x$.

Démonstration

Il suffit de procéder tranquillement, par récurrence ; $S_{P_n}(K)$ est clairement invariant par symétrie par rapport à P_n, $S_{P_{n-1}}$ est clairement invariant par symétrie par rapport à P_{n-1}, et par rapport à P_n aussi car la symétrisation de Steiner par rapport à un hyperplan P ne perturbe pas les symétries par rapport à des hyperplans orthogonaux à P (vérification immédiate sur la formule !), et ainsi de suite... L'invariance par rapport aux symétries par rapport aux n hyperplans donnent aussi l'invariance par $x \mapsto -x$.

Démonstration *On peut maintenant finir la preuve du théorème, en se donnant un compact K quelconque, en lui associant un compact K' égal à $S_{P_1} \circ S_{P_2} \circ S_{P_3} \circ \dots \circ S_{P_n}(K)$, qui, par les lemmes précédents, est invariant par symétrie par rapport à l'origine, et donc est inclus dans la boule $B(0, \delta(K')/2)$. Il ne reste qu'à appliquer les différents lemmes pour conclure...*

1.3 Triangulations d'un simplexe - Lemme de Sperner - conséquences

On s'inspire ici du livre [**?**], en tâchant de donner une preuve plus détaillée.

DÉFINITION 0.2 **simplexe**

On appelle **simplexe** de dimension n l'enveloppe convexe de $n+1$ points formant un repère affine.

On appelle **face d'un simplexe** l'enveloppe convexe d'un nombre fini (quelconque) de ses points. Sa **dimension** est par définition le nombre de points de cette face moins 1. On appelle g**-face** une face de dimension g.

LEMME 0.8

Tout élément P appartenant à un simplexe Δ est décrit de manière unique par ses coordonnées barycentriques dans le repère des sommets de ce simplexe, si l'on impose que la somme des dites coordonnées est 1. Chaque coordonnée est ≥ 0.

Démonstration *Voir la proposition-définition* **??**.

On se donne pour la suite un simplexe Δ de $\mathbb{R}^n$ de sommets x_0, x_1, ... , x_n.

Tout point x de Δ est donc repéré par ses coordonnées barycentriques $c_0(x)$, ... , $c_n(x)$, avec $\sum_{i=0..n} c_i(x) = 1$, et $\sum_{i=0}^{n} c_i(x).\overrightarrow{x.x_i} = \overrightarrow{0}$.

DÉFINITION 0.3 **triangulation d'un simplexe Δ**

Soit $\sigma \in \sigma_{n+1}$ une permutation de $[0, n]$.

On note Δ_σ l'ensemble des points x de Δ tels que

$$c_{\sigma(0)}(x) \geq c_{\sigma(1)}(x) \geq ... \geq c_{\sigma(n)}(x)$$

Proposition 0.9

•Δ est l'union des Δ_σ.
•Pour tout $\sigma \in \sigma_{n+1}$, Δ_σ est un simplexe.
•Les intérieurs des Δ_σ sont disjoints.

Démonstration *Le premier •ne mérite pas notre attention.*

Pour le second • , c'est plus difficile, et nous allons donc détailler :

Un point x est dans Δ_I avec I la permutation identité, si ses coordonnées c_0, c_1,...,c_n vérifient $c_0 \geq c_1 \geq ... \geq c_n$. En écrivant

$$t_0 = c_0$$
$$t_1 = c_1 - c_0$$
$$t_2 = c_2 - c_1 - c_0$$
$$t_i = c_i - c_{i-1} - c_{i-2} - ... - c_0$$
$$t_n = c_n - c_{n-1} - c_{n-2} - ... - c_0$$

on voit que x est dans Δ_I si et seulement si il est dans l'enveloppe convexe des points de coordonnées barycentriques

$$(1, 0, 0, 0, ..., 0)$$
$$(1, 1, 0, 0, ..., 0)$$
$$(1, 1, 1, 0, ..., 0)$$
$$...$$
$$(1, 1, 1, 1, ..., 1)$$

On n'a pas normalisé pour ne pas alourdir la notation, sinon on obtient

$$(1, 0, 0, 0, ..., 0)$$
$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, ..., 0)$$
$$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, ..., 0)$$
$$...$$
$$(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})$$

Donc il s'agit bien d'un simplexe. Il est non vide car les sommets définis ci-dessus forment bien un repère affine et donc l'intérieur est un voisinage de leur isobarycentre.

Il en va de même pour autre chose que l'identité ; Δ_σ est l'enveloppe convexe de n points comportant respectivement un 1 et seulement des 0 ailleurs, deux 1 et seulement des 0 ailleurs, trois 1 et seulement des 0 ailleurs, et ainsi de suite, chaque fois les 1 étant conservés, et un nouveau 1 étant ajouté.

Définition 0.4

On appelle **triangulation d'un simplexe** Δ un ensemble fini de simplexes Δ_i tels que :
•$\cup_i \Delta_i = \Delta$
•Si $i \neq j$, $Int(\Delta_j) \cap Int(\Delta_i) = \emptyset$
•L'intersection d'une face de Δ_i et d'une face de Δ_j (pour $i = j$ ou $i \neq j$) est soit vide soit une face de Δ_i et une face de Δ_j.

LEMME 0.10

L'ensemble des Δ_σ pour $\sigma \in \sigma_{n+1}$ est une triangulation de Δ.

Démonstration *•Il est bien clair que la réunion des Δ_σ est bien égale à Δ.*

•L'intersection des intérieurs de Δ_σ et Δ_τ avec $(\sigma, \tau) \in \sigma_{n+1}^2$ est incluse dans l'intérieur des intersections, et donc incluse dans un hyperplan ; donc elle est vide.

•Regardons ce qu'est une face de simplexe, par exemple le simplexe Δ_I, avec I la permutation identité.

Il s'agit du barycentre d'un nombre fini de sommets, de la forme $(1/p, 1/p, ..., 1/p, 1/p, 0, 0, ..., 0, 0)$. C'est-à-dire d'une somme pondérés de

$$(1, 0, 0, ..., 0)$$

$$(\frac{1}{i}, ..., \frac{1}{i}, 0, ..., 0)$$

$$(\frac{1}{i}, ..., \frac{1}{j}, 0, ..., 0)$$

On constate donc qu'une face est entièrement décrite par des équations du type $c_0(x)r_0c_1(x)r_1c_2(x)r_2...r_{n-1}c_n(x)r_n0$, avec r_i opérateur $=$ ou $\geq$.

Une intersection de faces va encore être du même type, car au plus elle va remplacer des $\geq$ par des $=$. D'où le résultat.

LEMME 0.11

Dans la triangulation de Δ en les Δ_σ où σ appartient à σ_{n+1}, les Δ_σ ont un diamètre inférieur à $\frac{n}{n+1}$ fois le diamètre de Δ.

Démonstration

•le centre de gravité x (ou isobarycentre) de Δ appartient à tout simplexe Δ_σ (car tous les $c_i(x)$ sont égaux).

•la distance de x à un point de Δ est inférieur ou égale aux distances aux sommets de Δ, donc la distance d'un point de Δ_σ à x est toujours inférieure ou égale à $\frac{n}{n+1}$ fois la longueur de la médiane.

•le diamètre de Δ_σ, qui est la longueur maximal d'un de ses côtés, est donc majoré par la longueur max des côtés sur la face opposée à x, et par la longueur max des arêtes débouchant sur x... Dans tous les cas, cette longueur est majorée par celle d'une médiane de Δ ou d'une face du simplexe (une face de dimension quelconque, éventuellement une arête).

LEMME 0.12

Pour tout ϵ on peut obtenir des triangulations de Δ en simplexes de diamètre inférieurs à ϵ.

Démonstration

On va utiliser par récurrence le lemme suivant. Les deux premiers •de la définition d'une triangulation sont faciles à obtenir, le problème est de montrer qu'une partition de chaque élément d'une partition donne encore une partition vérifiant le troisième point, c'est-à-dire le fait que l'intersection de deux faces de deux éléments distincts de la partition est soit vide soit égale à une face de chacun des deux éléments. Intuitivement, le problème est de voir que les faces se "recollent" bien.

Pour cela il suffit de voir que la triangulation faite selon le lemme précédent induit une triangulation de chacune des faces du dit simplexe - triangulation égale à celle qu'aurait donné le même lemme sur cette face. Cela se voit facilement en voyant qu'une face est une partie du simplexe où l'on annule une des composantes.

DÉFINITION 0.5 **Numérotation standard d'un simplexe**

Etant donnée une triangulation Δ_i d'un simplexe $\mathbb{D}$, on note S l'ensemble des sommets des éléments de cette triangulation. On appelle **numérotation standard** d'une triangulation d'un simplexe de sommets $x_0, ..., x_n$ une application f de S dans $\{0, n\}$ telle que $f(x_i) = i$ et si pour tout s dans S $f(s) = i$ pour un certain x_i tel que x_i est un sommet de la face de Δ de dimension minimale contenant x.

La caractérisation "pour tout s dans S, $f(s) = i$ pour un certain x_i tel que x_i est un sommet de la face de Δ de dimension minimale contenant x" inclue la condition $f(x_i) = i$, car une face peut très bien avoir une dimension 0. On constate donc que dans une triangulation comme celles que l'on a construites plus haut, l'isobarycentre est autorisé à prendre n'importe quelle valeur puisque la seule face qui le contienne est Δ lui-même.

PROPOSITION 0.13

Une numérotation standard f d'une triangulation du simplexe Δ enveloppe convexe de $(x_0, ..., x_n)$ induit une numérotation standard de la triangulation induite sur le simplexe Δ' enveloppe convexe de $(x_0, ..., x_{n-1})$.

Démonstration

•*Il est clair que tout sommet de la triangulation de Δ' a bien un numéro $< n$.*

•*Soit x sommet de la triangulation de Δ' appartenant à une face F minimale de Δ.*

•*F est forcément incluse dans Δ'.*

•*F est donc la même face que la face minimale de x dans Δ'.*

•*Donc la numérotation induite est bien standard.*

LEMME 0.14 **Lemme de Sperner**

Toute triangulation d'un simplexe de dimension n munie d'une numérotation standard possède un élément numéroté $(0, ..., n)$.

Démonstration

•*Soit Δ notre simplexe, supposé muni d'une numérotation standard f sur une triangulation T de Δ.*

•*On note $P(U)$ la propriété pour un simplexe U de dimension r d'avoir un sommet numéroté i et un seul pour tout i dans $[1, r]$.*

•*Soit E l'ensemble des simplexes de T ayant la propriété P.*

•*Soit F l'ensemble des simplexes de T qui ne sont pas dans E mais dont un numéro et un seul est numéroté i pour tout i dans $[0, n-1]$ (attention ils ne vérifient donc pas la propriété P).*

•*Soit G l'ensemble des $n-1$-faces de simplexes de T inclus dans Δ' et vérifiant la propriété P (rappelons qu'une face de simplexe est un simplexe).*

•Soit H l'ensemble des $n-1$-faces de simplexes de T qui ne sont pas contenues dans Δ' et qui vérifient la propriété P.

•Chaque élément de E contient une et une seule $n-1$-face ayant la propriété P.

•Chaque élément de F contient exactement deux faces ayant la propriété P (facile, il y a exactement deux éléments numérotés pareil, donc on bâtit deux simplexes ayant la numérotation requise).

•Un élément de G est face d'un et d'un seul simplexe (car il est inclus dans Δ').

•Un élément de H est face d'exactement deux simplexes, car il n'est pas inclus dans Δ', et car il n'est pas non plus sur une autre face puisqu'il ne contient pas de sommet numéroté n.

(par simplicité dans la suite et pour alléger les notations je note I le cardinal $|I|$ d'un ensemble I)

•On en déduit $E+2F=G+2.H$ en comptant le nombre de $n-1$-faces ayant la propriété P, avec leurs multiplicités (c'est-à-dire en comptant deux fois les faces communes à deux simplexes).

•En comptant modulo 2, on en déduit que E et G on la même parité.

•Il est clair que G est "le" E correspondant à Δ'.

•Par récurrence sur la dimension, on en déduit donc que G a toujours la même parité. Or dans le cas de la dimension 1, on constate facilement que ce nombre est impair ; on a une alternance de 0 et 1, 0 en premier, 1 à la fin, donc on a changé un nombre impair de fois de 0 à 1 ou de 1 à 0.

•On en déduit donc le résultat tant attendu ; E ne peut être nul puisqu'impair...

THÉORÈME 0.15 **Théorème de Brouwer**

Soit f une application continue de Δ dans Δ. Alors f admet au moins un point fixe.

Démonstration *•On suppose que f n'a pas de point fixe.*

•Soit Δ_i, pour $i \in [0,n]$, l'ensemble des $x \in P$ tels que $c_i(x) > c_i(f(x))$ (intuitivement f "éloigne" x du sommet i - attention, pas au sens de la mesure, mais au sens du poids barycentrique du sommet i ; les points les plus "loin" étant les points de la face opposée, le point le plus proche étant le sommet lui-même).

•$\Delta = \cup_i \Delta_i$. En effet, soit $x \in \Delta$.

- Supposons $c_i(x) \leq c_i(f(x))$ pour tout i.

- $\sum c_i(x) = \sum c_i(f(x)) = 1$

- donc $c_i(x) = c_i(f(x))$ pour tout i

- alors on a f admettant un point fixe en x.

- c'est une contradiction, donc il existe i tel que $c_i(x) > c_i(f(x))$.

•x_i appartient à Δ_i (évident ; f ne peut qu'"éloigner" un point de lui-même, puisque f n'a pas de point fixe)

•x_i n'appartient pas à Δ_j si $j \neq i$ (non moins évident ; x est déjà "loin" autant que possible de x_j, puisqu'il appartient à la face opposée)

•Si x appartient à la face de Δ engendrée par les x_i pour $i \in I$ pour un certain sous-ensemble I de $[0,n]$, alors x n'appartient pas aux Δ_i si $i \notin I$ (toujours évident - si x appartient à la face engendrée par les x_i pour $i \in I$, il appartient à la face opposée à x_j pour tout $j \notin I$, et ne peut donc en être éloigné).

•Soit T une triangulation de Δ, ayant pour ensemble de sommets l'ensemble S. Soit g l'application qui à $s \in S$ associe $g(s)$ avec $s \in \Delta_{g(s)}$; on cherche à montrer qu'il s'agit d'une numérotation standard.

•g est bien définie, puisque l'on a montré que les Δ_i recouvraient Δ.

•le fait que $g(x_i) = i$ a déjà été prouvé.

•soit $s \in S$, et F une face minimale de Δ contenant s. Il faut montrer que $g(s)$ est le numéro d'un sommet de F.

•si $F = \Delta$, le résultat est clair.

•si s appartient à une face stricte de Δ, alors s n'appartient pas aux Δ_j pour j ne désignant pas un numéro de sommet de F (prouvé un peu plus haut) ; donc $g(s)$ est forcément le numéro d'un sommet de F.

•g est donc bien une numérotation.

•On a montré qu'on pouvait construire des triangulations aussi fines que l'on voulait, au sens où chaque simplexe de la triangulation pouvait être imposé de taille inférieur à $1/n$. On se donne T_n une telle triangulation, avec g_n la numérotation correspondante, donnée par les questions précédentes.

•D'après le lemme de Sperner, il existe un élément de la triangulation T qui a la propriété P évoquée plus tôt, c'est-à-dire qu'il comporte un sommet numéroté i pour tout i dans $[0, n]$.

•On peut considérer alors la suite de sommets numérotés 0 dans des simplexes ayant la propriété P de la triangulation T_n.

•Puisque l'on est dans un compact métrique, on peut en extraire une sous-suite convergente, par le théorème de Bolzano-Weierstrass (voir théorème **??***). Soit x la limite.*

•x est aussi la limite des suites de sommets numérotés i dans des simplexes ayant la propriété P, pour $i \in [1, n]$, car le diamètre des simplexes tend vers 0.

•Par continuité de f, $c_i(f(x)) \geq c_i(x)$ pour tout i.

•Or $\sum_i c_i(x) = \sum_i c_i(f(x)) = 1$, donc $c_i(f(x)) = c_i(x)$ pour tout i.

•On en déduit alors que $x = f(x)$. D'où la contradiction...

COROLLAIRE 0.16 **Brouwer**

Toute application continue d'une boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même comporte un point fixe.

Démonstration

En fait il suffit de montrer que la boule unité fermée est homéomorphe à un simplexe. Cela est fait dans la proposition **??***.*

COROLLAIRE 0.17 **Champ rentrant dans la sphère**

Soit V un champ de vecteur continu de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Si pour tout x $< V(x), x >$ est négatif strictement [1], alors V s'annule au moins en un point de la boule unité.

Démonstration

•On note S la sphère unité fermée, et C_r la couronne constituée par la boule unité fermée privée de la boule ouverte de rayon $1 - r$.

•On considère pour tout ϵ l'application f_ϵ de $\overline{B}$ (la boule unité fermée) dans $\mathbb{R}^n$ qui à x associe $x + \epsilon.\overrightarrow{V}(x)$.

•f_ϵ est continu.

•V étant continue sur un compact $\overline{B}$, on peut lui trouver un majorant à $\|V\|$. Notons M ce maximum.

•V étant continue sur un compact S, elle y atteint son maximum, qui est négatif. Notons m ce maximum ; on a $m < 0$.

•En tout point x de S, on peut centrer une boule ouverte de rayon r_x sur laquelle $< x, V(x) >$ est inférieur à $m/2$. La sphère S est recouverte par les boules centrées en x de rayon $r_x/2$; on peut donc extraire de ce recouvrement un recouvrement fini. Les boules de rayon r_x recouvrent elle aussi S, mais elles recouvrent aussi une couronne C_r pour un r assez petit.

•Sur C_r, on a donc $< x, V(x) >$ inférieur à $m/2$.

•$\|f_\epsilon(x)\|^2 = \|x\|^2 + \epsilon^2 \|V(x)\|^2 + 2\epsilon < V(x), x >$.

•Donc $\|f_\epsilon(x)\|^2 \leq \|x\|^2 + \epsilon^2.M^2 + 2\epsilon < V(x), x >$

•Sur C_r, on a alors $\|f_\epsilon(x)\|^2 \leq \|x\|^2 + \epsilon^2.M^2 + \epsilon.m$

•Pour ϵ suffisamment petit, on a donc $\|f_\epsilon(x)\|^2 < \|x\|^2$

•Pour ϵ suffisamment petit et $\|x\| < 1 - r$ on a aussi $\|f(x)\| \leq 1$ (puisque V est borné).

*•On déduit de tout cela que f_ϵ pour ϵ assez petit est une application de la boule unité fermée dans la boule unité fermée. Par le résultat **??**, on en déduit donc que f_ϵ admet un point fixe, et que donc V s'annule quelque part.*

1.4 Fractions continues

Théorème 0.18 **Formule d'Euler**

Supposons les a_i tous non nuls.
Alors $1/a_1 - 1/a_2 + 1/a_3 - 1/a_4 + ... + (-1)^n/a_n =$

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{a_1^2}{a_2 - a_1 + \cfrac{a_1^2}{a_3 - a_2 + \cfrac{a_3^2}{\ddots + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} - a_{n-2} + \cfrac{a_{n-1}^2}{a_n - a_{n-1}}}}}}}$$

Démonstration

•Pour $n = 1$, le résultat est clair.

•Au rang 2, un calcul rapide montre que le résultat est encore valable.

•On procède ensuite par récurrence, en supposant l'égalité vraie pour $n-1$ et les rangs inférieurs.

•Dans l'égalité pour $n-1$, on remplace a_n par $\frac{a_n.a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}$

•Le résultat en découle tout seul...

Références

[1] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, V. Maillot, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1*, Masson, 1997.