Géométrie affine et projective

Christophe Antonini[1], Olivier Teytaud[2], Pierre Borgnat[3], Annie Chateau[4], and Edouard Lebeau[5]

[1]Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes
[2]Chargé de rechercher INRIA, Université d'Orsay, Orsay
[3]Chargé de recherche CNRS, ENS Lyon, Lyon
[4]Maitre de conférence, Université Montpellier-2, Montpellier
[5]Enseignant en CPGE, Lycée Henri Poincaré, Nancy

6 février 2022

Rudiments de géométrie affine et projective

1 Géométrie affine et projective

Dans la partie affine de ce chapitre, les démonstrations seront succinctes et approximatives ; en effet il est souvent suffisant d'avoir de bonnes connaissances en algèbre linéaire pour comprendre cette partie sans difficulté et pour être capable de refaire les démonstrations.

Il est donc nécessaire et presque suffisant pour maitriser tout cela d'avoir convenablement étudié les parties **??** (algèbre linéaire), **??** (algèbre linéaire en dimension finie) et **??** (espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert).

Après quelques généralités (1.1), on verra le barycentre (1.2) et les coordonnées barycentriques (1.3), avant de considérer les applications affines, les sous-espaces affines, les projections, les symétries, la mesure (1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8). Quelques chapitres plus marginaux concluront (définitions supplémentaires, lien avec le linéaire, formes 2-affines, zoologie ; respectivement 1.9, 1.10, 1.11 et 1.12). On passera alors à la géométrie projective.

La section 1.14 fournira des éléments complémentaires.

1.1 Définitions et généralités

Définition 0.1 espace affine de direction E

Étant donné E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle **espace affine de direction E** un ensemble X muni d'une application $(x,y) \mapsto \overrightarrow{xy}$ de $X \times X$ dans E telle que :

•$\forall (x,y,z) \in X^3, \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$

•$\forall x \in X, \forall u \in E, \exists! y \in X \ \overrightarrow{xy} = u$

On définit alors une addition de $X \times E$ dans X par $x + u = y$ avec y tel que $\overrightarrow{xy} = u$.

On appelle **scalaires** les éléments du corps $\mathbb{K}$.

On appelle **vecteurs** les éléments de l'espace vectoriel E.

On appelle **points** les éléments de l'espace affine.

On note parfois surmontés d'une flèche les éléments de E, pour les distinguer des éléments de X ; ainsi au lieu de $u = \overrightarrow{xy}$ ou $x + u = y$ on peut noter $x + \overrightarrow{u} = y$.

Une convention usuelle est aussi de noter $\overrightarrow{X}$ un espace vectoriel associé à X ; il faut bien voir toutefois que la direction n'est pas unique et qu'il ne suffit pas que X soit un espace affine de direction E pour qu'on puisse définir canoniquement sa direction $\overrightarrow{X}$.

On appelle **dimension d'un espace affine** la dimension de sa direction lorsque celle-ci est finie ; un espace affine est dit **de dimension infinie** lorsque sa direction est de dimension infinie.

On appelle **translation de vecteur** a avec $a \in E$ l'application qui à x dans X associe $x + a$.

On appelle **variété affine d'un espace affine X de direction F** ou **sous-espace affine de X** tout sous-ensemble de X de la forme $x + F$ avec $x \in X$ et F sous-espace vectoriel de E (**droite affine** si ce sous-espace vectoriel est une droite, **plan affine** si ce sous-espace vectoriel est un plan, **hyperplan affine** si ce sous-espace vectoriel est un hyperplan,etc).

On appelle **vectorialisé de X en** $x_0 \in X$ l'espace vectoriel $(X, +)$ pour l'addition $x + y = z$ avec z tel que $\overrightarrow{x_0x} + \overrightarrow{x_0y} = \overrightarrow{x_0z}$. Pour l'application qui à (x,y) associe z tel que $x + z = y$, X est un espace affine de direction son vectorialisé.

⚠ *Attention 0.1* Bien noter l'unicité ($\exists!$) dans le deuxième axiome !

⚠ *Attention 0.2* On peut lier facilement cette notion à celle d'espace affine définie dans le cadre des espaces vectoriels . En effet, un espace affine (au sens des espaces vectoriels) est un espace affine pour l'application $(x,y) \mapsto \overrightarrow{xy} = y - x$, et un espace affine A (au sens ici défini) est un espace affine au sens des espaces vectoriels ; il suffit de choisir un point x arbitraire dans A et de considérer l'addition dans A définie par $b + c = d$, avec d tel que $\overrightarrow{xd} = \overrightarrow{xb} + \overrightarrow{xc}$.

Proposition 0.1

Les propriétés suivantes sont des propriétés élémentaires faciles à démontrer :

•$\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{0} \iff x = y$;

•$\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$ (relation de Chasles) ;

•$\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{zt} \iff \overrightarrow{xz} = \overrightarrow{yt}$ (propriété du parallélogramme) ;

•l'ensemble des translations de X est un groupe additif isomorphe au groupe additif de la direction de X ;

•les vectorialisés d'un espace affine sont tous isomorphes entre eux.

1.2 Barycentre

On se donne X un espace affine.

Définition - proposition 0.2 **1**

Étant donnés $x_1, ..., x_n$ des points de X, des scalaires $t_1, ..., t_n$ de somme 0, le vecteur $t_1.\overrightarrow{Ox_1} + t_2.\overrightarrow{Ox_2} + ... + t_n.\overrightarrow{Ox_n}$ est indépendant de $O \in X$.

Étant donnés $x_1, ..., x_n$ des points de X, des scalaires $t_1, ..., t_n$ de somme 1, le point $O + t_1.\overrightarrow{Ox_1} + t_2.\overrightarrow{Ox_2} + ... + t_n.\overrightarrow{Ox_n}$ est indépendant de $O \in X$. On l'appelle **barycentre** des (x_i, t_i) pour $i \in \{1, ..., n\}$.

Attention 0.3 Un barycentre est ici défini pour une somme de coefficients égale à 1 ; mais on peut aussi le définir pour une somme non nulle quelconque, en remplaçant $O + t_1.\overrightarrow{Ox_1} + t_2.\overrightarrow{Ox_2} + ... + t_n.\overrightarrow{Ox_n}$ par

$$O + \frac{t_1}{t}\overrightarrow{Ox_1} + \frac{t_2}{t}\overrightarrow{Ox_2} + ... + \frac{t_n}{t}\overrightarrow{Ox_n}$$

avec $t = \sum t_i \neq 0$.

On appelle **isobarycentre** de n points le barycentre de ces points pondérés par $\frac{1}{n}$.

Démonstration *Par la relation de Chasles.*

Remarque 0.1 Remarques •On ne change pas le barycentre en multipliant tous les t_i par une même constante non nulle.

•Si $t_i = 0$ on peut se passer de (x_i, t_i).

•x est le barycentre des (x_i, t_i) si et seulement si $\sum_{i \in [[1,n]]} t_i.xx_i = 0$.

1.3 Coordonnées cartésiennes, coordonnées barycentriques

Définition - proposition 0.3 **1**

Étant donné X un espace affine , la famille finie $(x_i)_{i \in [[1,p]]}$ de points de X est dite **affinement libre** si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

•il existe i tel que $(\overrightarrow{x_i x_j})_{j \in [[1,p]], j \neq i}$ est une famille libre.

•pour tout i dans $[[1,p]]$ la famille $(\overrightarrow{x_i x_j})_{j \in [[1,p]], j \neq i}$ est une famille libre.

Une famille infinie de X est dite **affinement libre** lorsque toute sous-famille finie de cette famille est affinement libre.

Étant donné X un espace affine de dimension finie n et $\overrightarrow{X}$ sa direction, on se donne $\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n$ une base de $\overrightarrow{X}$, et O un point de X. Alors tout point x de X s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = O + t_1.\overrightarrow{e}_1 + ... + t_n.\overrightarrow{e}_n \qquad (*)$$

Avec x_i défini par $x_i = O + e_i$, la famille $(O, x_1, ..., x_n)$ est appelée **repère affine de** X ; c'est en particulier une famille affinement libre. Il est suffisant pour qu'une famille affinement libre soit un repère affine que son cardinal soit $(n+1)$.

$(O, \overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ est appelé **repère cartésien de** X.

Les t_i sont appelés **coordonnées cartésiennes** de x dans ce repère.

On note qu'avec $t_0 = 1 - t_1 - t_2 - ... - t_n$, la relation $(*)$ équivaut à la relation

$$\overrightarrow{Ox} = t_0.\overrightarrow{OO} + t_1.\overrightarrow{Ox_1} + t_2.\overrightarrow{Ox_2} + ... + t_n.\overrightarrow{Ox_n}$$

avec $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$, si bien que pour tout M

$$\overrightarrow{Mx} = t_0.\overrightarrow{MO} + t_1.\overrightarrow{Mx_1} + t_2.\overrightarrow{Mx_2} + ... + t_n.\overrightarrow{Mx_n}$$

On a (dans ce cas, c'est-à-dire avec les $\overrightarrow{e_i}$ formant une base de $\overrightarrow{X}$) existence et unicité de cette décomposition barycentrique.

Les t_i tels que $\sum_{i=0..n} t_i \neq 0$ et $(\sum_{i=0..n} t_i).\overrightarrow{Mx} = t_0.\overrightarrow{MO} + t_1.\overrightarrow{Mx_1} + t_2.\overrightarrow{Mx_2} + ... + t_n.\overrightarrow{Mx_n}$ sont appelés **des coordonnées barycentriques de** x **dans le repère affine** $(O, x_1, ..., x_n)$.

Les t_i tels que $\sum_{i=0..n} t_i = 1$ et $\overrightarrow{Mx} = t_0.\overrightarrow{MO} + t_1.\overrightarrow{Mx_1} + t_2.\overrightarrow{Mx_2} + ... + t_n.\overrightarrow{Mx_n}$ sont appelés **les coordonnées barycentriques normalisées de** x **dans le repère affine** $(O, x_1, ..., x_n)$.

La méthode de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées barycentriques est à retenir ; si $\overrightarrow{OM} = \sum t_i \overrightarrow{Ox_i}$, alors les coordonnées barycentriques normalisées de M dans $(O, x_1, x_2, ..., x_n)$ sont $(1 - \sum t_i, t_1, t_2, ...t_n)$.

On remarque (preuves faciles) que :

•Une famille finie est affinement libre si et seulement si aucun de ses points ne peut s'exprimer comme barycentre des autres.

•Deux points distincts forment toujours une famille affinement libre.

•Étant donné un repère vectoriel R, une famille de $(n+1)$ points $x_1, ..., x_{n+1}$ en dimension n est affinement libre si et seulement si le déterminant suivant est non nul, avec x_i de coordonnées cartésiennes $(t_{i,1}, ..., t_{i,n})$ dans R :

$$\begin{vmatrix} t_{1,1} & t_{2,1} & \dots & t_{n,1} & t_{n+1,1} \\ t_{1,2} & t_{2,2} & \dots & t_{n,2} & t_{n+1,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{1,n} & t_{2,n} & \dots & t_{n,n} & t_{n+1,n} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(il suffit pour le voir de soustraire la première ligne à toutes les autres puis de revenir à la définition d'un famille affinement libre (proposition-définition 0.3))

•Étant donné un repère affine, une famille de $n+1$ points en dimension n est affinement libre si et seulement si le produit mixte de leurs vecteurs de coordonnées barycentriques dans ce repère est non nul. Autrement dit les $(n+1)$ points $x_0, ..., x_n$, avec x_i de coordonnées barycentriques $(u_{i,0}, ..., u_{i,n})$ forment une famille affinement libre si et seulement si le déterminant suivant est non nul :

$$\begin{vmatrix} u_{1,0} & u_{2,0} & \dots & u_{n,0} & u_{n+1,0} \\ u_{1,1} & u_{2,1} & \dots & u_{n,1} & u_{n+1,1} \\ u_{1,2} & u_{2,2} & \dots & u_{n,2} & u_{n+1,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{1,n} & u_{2,n} & \dots & u_{n,n} & u_{n+1,n} \end{vmatrix}$$

(il suffit pour le comprendre de considérer ce déterminant et de remplacer la première ligne par la somme de toutes les lignes - puis de se ramener au point précédent)

Définition - proposition 0.4 **1**

On se place dans un espace affine de dimension finie n. On a vu qu'une famille de n points est liée si et seulement si le produit mixte de leurs coordonnées barycentriques dans un repère affine donné est nul. Donc, si l'on se donne n points affinement libres, l'ensemble des points appartenant à l'hyperplan engendré par ces n points $(P_i)_{i\in[[1,n]]}$, avec P_i de coordonnées barycentriques $(t_{i,j})_{j\in[0,n]}$, est l'ensemble des points de coordonnées barycentriques $x_0, ..., x_n$ telles que

$$\begin{vmatrix} t_{1,0} & t_{2,0} & \dots & t_{n,0} & x_0 \\ t_{1,1} & t_{2,1} & \dots & t_{n,1} & x_1 \\ t_{1,2} & t_{2,2} & \dots & t_{n,2} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots t_{1,n} \\ t_{2,n} & \dots & t_{n,n} & x_n & \end{vmatrix} = 0$$

En développant le déterminant suivant la dernière colonne, on obtient une équation linéaire en les x_i, de la forme $u_0.x_0 + u_1.x_1 + \cdots + u_n.x_n = 0$; le vecteur $(u_0, u_1, ..., u_n)$ est un vecteur de **coordonnées tangentielles** de l'hyperplan.

Les coordonnées tangentielles d'un hyperplan sont uniques à proportionalité près. Un n-uplet est un vecteur de coordonnées tangentielles d'un hyperplan si et seulement si ses coordonnées ne sont pas toutes nulles.

1.4 Applications affines

Définition - proposition 0.5 **1**

Soit X et X' deux espaces affines . Une application f de X dans X' est dite **affine** si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

•il existe x tel que l'application $\overrightarrow{u} \mapsto \overrightarrow{f(x)f(x+u)}$ soit une application linéaire de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{X}'$;

•pour tout x l'application $\overrightarrow{u} \mapsto \overrightarrow{f(x)f(x+u)}$ est une application linéaire de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{X}'$.

L'application linéaire est alors indépendante du point x ; on l'appelle **application linéaire associée à** f ; on la note $\overrightarrow{f}$.

Si $\overrightarrow{f}$ est une forme linéaire, c'est-à-dire si X' est de dimension 1 (est une droite), on dit que f est une **forme affine**.

Un **isomorphisme d'espaces affines** est une bijection linéaire entre deux espaces affines .

Proposition 0.2

L'application linéaire $\overrightarrow{f}$ associée à une application affine f vérifie

$$\forall (x,y) \in X^2, \overrightarrow{f}(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{f(x)f(y)}$$

ce que l'on peut aussi écrire $\forall (x,y) \in X^2, f(y) = f(x) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{xy})$

Étant donné x appartenant à X, avec X un espace affine , deux applications affines de même espace de départ X et de même espace d'arrivée X' sont égales si et seulement si leurs applications linéaires associées sont égales et si elles coïncident en x.

Toute application affine f d'un $\mathbb{R}^n$ dans un $\mathbb{R}^m$ est différentiable en tout point ; la différentielle de f (en n'importe quel point) est égale à $\overrightarrow{f}$.

f d'un espace affine dans un autre est affine si et seulement si pour toute famille $(x_1, ..., x_n)$ d'éléments de X et toute famille $(t_1, ..., t_n)$ de réel de somme $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ on a

$$f(\sum_{i=1}^n t_i.x_i) = \sum_{i=1}^n t_i.f(x_i)$$

Une composée d'applications affines est affine.

La réciproque d'une bijection affine est une bijection affine.

L'ensemble des bijections affines d'un espace affine E sur lui-même est un groupe pour la composition. On l'appelle **groupe affine** de E (noté $GA(E)$). On pourra consulter **??** pour plus d'informations.

Une application f d'un espace affine dans un autre est affine si et seulement si elle conserve le barycentre, c'est-à-dire si l'image du barycentre des (x_i, t_i) est le barycentre des $(f(x_i), t_i)$ pour toute famille finie (x_i) et toute famille de scalaires (t_i).

Proposition 0.3 **Sur les points fixes des applications affines**

Si f est affine de X dans X (avec X un espace affine) et a un point fixe x, alors l'application f induit une application linéaire du vectorialisé de X en x dans lui-même (i.e. un endomorphisme).

Si f affine de X dans X admet un point fixe x alors l'ensemble des points fixes de f est $x + F$ avec F le noyau de $(\overrightarrow{f} - I)$.

Si X est un espace affine de dimension finie, si f est affine de X dans X avec $\overrightarrow{f}$ ayant un unique point fixe, alors f a un unique point fixe (et l'unique point fixe de $\overrightarrow{f}$ est nécessairement 0).

Définition 0.6 **homothétie affine**

Une application affine f est appelée **homothétie affine** si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est une homothétie (i.e. de la forme $x \mapsto \lambda.x$ avec $\lambda \neq 0$).

PROPOSITION 0.4

Une homothétie affine de rapport $\neq 1$ admet un et un seul point fixe.

Démonstration *Application immédiate du dernier point de la proposition ci-dessus, une homothétie linéaire de rapport différent de* 1 *ayant* 0 *pour unique point fixe.*

1.5 Sous-espaces affines d'un espace affine

DÉFINITION 0.7 **sous-espace affine**

On appelle **sous-espace affine** d'un espace affine X une partie P telle que l'une des deux propriétés équivalentes suivantes soit vérifiée pour un certain sous-espace vectoriel F de $\overrightarrow{X}$:

•il existe x dans X tel que $P = F + x$

•pour tout x dans X $P = F + x$; F est la **direction** de X.

Deux sous-espaces affines d'un espace affine sont dits **supplémentaires** si et seulement si leurs directions sont supplémentaires.

On appelle **hyperplan affine** d'un espace affine X un sous-espace affine de X admettant un sous-espace affine supplémentaire de dimension 1.

Un sous-espace affine est un espace affine .

DÉFINITION - PROPOSITION 0.8 **1**

Étant donné P une partie non vide d'un espace affine X, l'ensemble des barycentres de parties finies de P est un sous-espace affine de X ; on l'appelle **sous-espace affine engendré par** P.

PROPOSITION 0.5

Une partie non vide P d'un espace affine X est un sous-espace affine de X si et seulement si tout barycentre d'une famille finie de points de P est dans P.

Une partie non vide P d'un espace affine X est un sous-espace affine de X si et seulement si P contient toute droite engendrée par deux points de P.

Le sous-espace affine engendré par une partie finie non vide P est de dimension $card(P) - 1$ (cardinal de P moins 1) si et seulement si la famille des éléments de P est affinement libre.

L'image d'un sous-espace affine Y par une application affine f d'un espace affine X dans un espace affine X' est un sous-espace affine de l'espace affine X' de direction $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{Y})$.

L'image réciproque d'un sous-espace affine Y par une application affine f est soit vide soit un sous-espace affine de direction l'image réciproque par $\overrightarrow{f}$ de $\overrightarrow{Y}$.

Si Y est parallèle à Z, avec Y et Z deux sous-espaces affines de X, si f est une application affine, alors $f(Y)$ est parallèle à $f(Z)$.

Un sous-espace affine Y de dimension p d'un espace affine X de dimension n s'exprime comme intersection de $(n-p)$ images réciproques de singletons par des formes affines indépendantes ; c'est-à-dire

$$Y = \{x \in X; \forall i \in [[1, n-p]] f_i(x) = b_i\}$$

pour une certaine famille f_i de formes affines indépendantes et des scalaires b_i. La direction de Y est l'espace vectoriel

$$\overrightarrow{Y} = \{\overrightarrow{x} \in \overrightarrow{X}; \forall i \in [[1, n-p]], \overrightarrow{f_i}(\overrightarrow{x}) = 0\} = \Cap_i Ker \overrightarrow{f_i}$$

Étant donnés A et B deux sous-espaces affines disjoints d'un espace affine X, la dimension du sous-espace affine engendré par $A \cup B$ est égale à la dimension de $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ plus un.

Étant donnés A et B deux sous-espaces affines de dimension finie et non disjoints d'un espace affine X, la dimension du sous-espace affine engendré par $A \cup B$ est égale à la dimension de A plus la dimension de B moins la dimension de $A \cap B$ ($\dim A + \dim B - \dim A \cap B = \dim\ Vect(A \cup B)$).

1.6 Projections dans un espace affine

Définition 0.9 **projeté de x sur Y parallèlement à Z**

On se donne Y et Z deux sous-espaces affines supplémentaires de X (un espace affine). Alors (voir plus haut) l'intersection de Y et Z est réduite à un singleton ; appelons O ce singleton. On considère alors $\overrightarrow{X}$ le vectorialisé de X et O, $\overrightarrow{Y}$ le vectorialisé de Y en O, et $\overrightarrow{Z}$ le vectorialisé de Z en O. Tout point x de X est aussi un point de $\overrightarrow{X}$; or $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{Y} \oplus \overrightarrow{Z}$; donc $x = y + z$ avec y dans $\overrightarrow{Y}$ et z dans $\overrightarrow{Z}$. On appelle y le **projeté de x sur Y parallèlement à Z**. L'application qui à x associe son projeté sur Y parallèlement à Z est appelée **projecteur sur Y parallèlement à Z**.

On remarque que si Z et Z' sont parallèles alors le projecteur sur Y parallèlement à Z est égal au projecteur sur Y parallèlement à Z'.

Voyons quelques propriétés des projecteurs :

Proposition 0.6 **Propriétés des projecteurs**

En notant p le projecteur sur Y parallèlement à Z :

•pour tout x dans X $p(x)$ est l'unique point de Y tel que $\overrightarrow{xp(x)} \in \overrightarrow{Z}$, avec $\overrightarrow{Z}$ la direction de Z.

•$p \circ p = p$ (p est idempotent)

•p est affine

•$p(X) = Y$

•p induit l'identité sur Y

•$\overrightarrow{Z}$ est le noyau de $\overrightarrow{p}$.

Et maintenant des caractérisations :

PROPOSITION 0.7
Caractérisations des projecteurs :
•Toute application affine idempotente est un projecteur.
•Toute application f affine ayant un point fixe et telle que $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}$ est un projecteur

1.7 Symétries dans un espace affine

DÉFINITION 0.10 **milieu de xy**

Étant donné X un espace affine , le point $x + \frac{1}{2}\overrightarrow{xy} = y + \frac{1}{2}\overrightarrow{yx}$ est appelé **milieu de** xy. C'est le barycentre de $(x, \frac{1}{2})$ et $(y, \frac{1}{2})$.

On appelle **symétrie** une application affine f d'un espace affine dans lui-même telle que $f \circ f = I$ (i.e. f est involutive).

PROPOSITION 0.8

Quelques caractérisations des symétries :
•Une application f d'un espace affine dans lui-même est une symétrie si et seulement si f est affine, admet un point fixe, et vérifie $\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{Id}$
•Une application f d'un espace affine X dans lui-même est une symétrie si et seulement si il existe deux sous-espaces affines Y et Z supplémentaires de X tels que, pour tout x, le milieu de $xf(x)$ appartienne à Y et $\overrightarrow{xf(x)} \in \overrightarrow{Z}$.
•Une application f d'un espace affine X dans lui-même est une symétrie si et seulement si il existe p un projecteur de X tel que $\overrightarrow{xf(x)} = 2.\overrightarrow{xp(x)}$.
•Une application f d'un espace affine X dans lui-même est une symétrie si et seulement si il existe p un projecteur de X tel que $p(x)$ soit le milieu de $xf(x)$.

DÉFINITION 0.11 **associés**

Le projecteur évoqué dans les deux derniers points de la proposition ci-dessus est unique ; la symétrie et le projecteur en question sont dits **associés**.

DÉFINITION - PROPOSITION 0.12 **1**

Une symétrie f est entièrement caractérisée par l'ensemble Y de ses points fixes et par le sous-espace vectoriel $\overrightarrow{Z}$ de $\overrightarrow{X}$ des vecteurs de la forme $\overrightarrow{xf(x)}$; on l'appelle **symétrie par rapport à Y parallèlement à $\overrightarrow{Z}$** (ou par rapport à Z, avec Z sous-espace affine quelconque de X de direction $\overrightarrow{Z}$).

Le sous-espace vectoriel $\overrightarrow{Z}$ de $\overrightarrow{X}$ est aussi le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 pour l'endomorphisme $\overrightarrow{f}$.

1.8 Mesure dans un espace affine

Dans cette brève introduction, on citera l'abscisse le long d'une droite (mesure en dimension 1) et la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. La définition **??** introduira (dans un cas simple) la mesure de l'aire pour des surfaces « non plates », et la définition 0.25 définira des mesures le long de chemins « non droits ».

1.8.1 Abscisse le long d'une droite

On se donne X un espace affine .

Étant donné a et b distincts dans X, l'ensemble des $a + t.\overrightarrow{ab}$ est une droite (i.e. un sous-espace affine de dimension 1). Tout point x de cette droite s'écrit de manière unique $a+t.\overrightarrow{ab}$; t est l'abscisse de x suivant $(a, \overrightarrow{ab})$. Étant donnés x et y sur la même droite, la différence $t_x - t_y$ avec t_x (resp. t_y) l'abscisse de x (resp. y) est appelée **mesure algébrique de l'arc** (xy) **suivant** $(a, \overrightarrow{ab})$.

1.8.2 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

Cette partie ne sera pas détaillée formellement.

La définition du volume par la mesure de Lebesgue coïncide avec la définition du volume donnée par le produit mixte : le volume $\{O + t_1.x_1 + ... + t_n.x_n; (t_1, ..., t_n) \in [0, 1]^n\}$ pour la mesure de Lebesgue est égal à la valeur absolue du produit mixte $|[x_1, ..., x_n]|$.

Avec P une partie affine de X, espace affine , et f une application affine de X dans lui-même, alors $Volume(f(P)) = |det\ \overrightarrow{f}|.Volume(P)$.

1.9 Définitions supplémentaires

On donne ici quelques définitions pouvant servir, sans développer intensément...

Définition 0.13 **dilatation affine d'hyperplan H, de direction D et de rapport λ**

Étant donné X un espace affine , H un hyperplan affine, D une droite affine supplémentaire de H, et λ un scalaire non nul, on appelle **dilatation affine d'hyperplan H, de direction D et de rapport** λ l'application dont la restriction au vectorialisé de H en $H \cap D$ est l'identité, et dont la restriction au vectorialisé de D en $H \cap D$ est une homothétie de rapport λ.

Une dilatation est une bijection affine. Sa bijection réciproque s'obtient en remplaçant λ par $\frac{1}{\lambda}$.

L'application linéaire associée à une dilatation affine est une dilatation (au sens des espaces vectoriels).

Définition 0.14 **transvection affine**

Étant donné X un espace affine , on appelle **transvection affine** une application f telle qu'il existe H un hyperplan affine, h une forme affine sur X telle que $\{x \in X; h(x) = 0\} = H$, un vecteur $\overrightarrow{u}$ dans $\overrightarrow{H}$ tels que pour tout x dans X, $f(x) = x + h(x).\overrightarrow{u}$.

⚠ *Attention 0.4* Bien noter que $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{H} = \ker(\overrightarrow{h})$.

Une transvection est une bijection affine. Sa transvection réciproque s'obtient en remplaçant $\overrightarrow{u}$ par $-\overrightarrow{u}$.

L'application linéaire associée à une transvection affine est une transvection (au sens des espaces vectoriels).

1.10 Pour se ramener à l'algèbre linéaire

Il est bien évident au vu de tout ceci que géométrie affine et algèbre linéaire sont très fortement liées. On va préciser ces liens dans cette partie, en plongeant les espaces affines dans des espaces vectoriels (en ajoutant une dimension - ne pas confondre ce plongement et la notion de direction qui n'ajoute aucune dimension !).

On se donne X un espace affine .

Théorème 0.9

Étant donné X un espace affine de direction $\overrightarrow{X}$, il existe un espace vectoriel $\hat{X}$ tel que X est un hyperplan affine de $\hat{X}$, $\overrightarrow{X}$ est un hyperplan (vectoriel) de $\hat{X}$; en outre :

•chaque élément de $\hat{X}$ qui n'est pas dans $\overrightarrow{X}$ s'écrit sous la forme $\lambda.x$ avec $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$;

•pour tout élément y dans X, $\hat{X} = X \oplus \mathbb{K}.y$;

•toute famille affinement libre de X est une famille libre de $\hat{X}$;

•les repères affines de X sont les bases de $\hat{X}$ formées d'éléments de X ;

•les coordonnées barycentrique (normalisées) dans un repère affine de X sont exactement les coordonnées dans la même base en tant que base de $\hat{X}$.

•Étant donné $(R, e_1, ..., e_n)$ un repère cartésien de X, si $x \in X$ a pour coordonnées cartésiennes $(x_1, ..., x_n)$ dans ce repère, x a pour coordonnées $(1, x_1, ..., x_n)$ dans la base de $\hat{X}$ égale à $(R, e_1, ..., e_n)$ (bien voir que R est un élément de X, donc un élément de $\hat{X}$, et que e_i est un élément de $\overrightarrow{X}$, donc aussi un élément de X).

Il n'y a pas unicité de $\hat{X}$, mais on peut le construire explicitement en considérant l'ensemble réunion de X, de $\overrightarrow{X}$, et de l'ensemble des couples $(\lambda, \overrightarrow{x})$ appartenant à $(\mathbb{K} \setminus \{0,1\}) \times \overrightarrow{X}$. Les lois sont celles que l'on attend en identifiant $\overrightarrow{X}$ à $\{0\} \times \overrightarrow{X}$ et X à $\{1\} \times \overrightarrow{X}$.

Définition 0.15 $\hat{X}$

Cet espace vectoriel est noté par la suite $\hat{X}$.

Enfin un petit théorème immédiat :

Théorème 0.10

Pour toute application affine f de X dans X', il existe une et une seule application linéaire $\hat{f}$ de $\hat{X}$ dans $\hat{X}'$ telle que $\hat{f}$ induise f. En outre $\overrightarrow{f}$ est la restriction de f à $\overrightarrow{X}$.

1.11 Formes 2-affines et quadriques affines

DÉFINITION 0.16 **forme 2-affine**

On appelle **forme 2-affine** une application d'un espace affine X de dimension finie dans $\mathbb{K}$ telle qu'étant donné un certain repère cartésien R, $f(x) = \sum_{(i,j)\in[[1,n]]^2} A_{i,j}.x_i.x_j + 2\sum_{i\in[[1,n]]} b_i.x_i + c$, avec x_i les coordonnées cartésiennes de x dans R et b un vecteur à n composantes, c un réel, A une matrice de type (n,n) qui ne soit pas antisymétrique.

On appelle **quadrique affine** d'un espace affine de dimension finie une équation du type $f(x) = 0$ avec f une forme 2-affine sur cet espace affine .

PROPOSITION 0.11
Quelques propriétés des quadriques :

•La définition ci-dessus stipule seulement qu'il existe un certain repère cartésien dans lequel on peut exprimer ainsi l'application ; en fait s'il en est ainsi, l'application s'exprime de même dans tout référentiel cartésien.

•On peut aussi imposer, sans changer la notion de forme 2-affine, que la matrice A soit symétrique non nulle.

PROPOSITION 0.12

L'application $f \mapsto f_{|X}$ de l'ensemble des formes quadratiques sur $\hat{X}$ dont la restriction à $\overrightarrow{X}$ n'est pas la forme quadratique nulle dans l'ensemble des formes 2-affines sur X est une bijection.

Ce résultat est important ; il permet donc de ramener l'étude d'une forme 2-affine sur un espace affine de dimension n à l'étude de la restriction à un hyperplan d'une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension $(n+1)$.

1.12 Zoologie de la géométrie affine

Outre cette section on pourra consulter la section 1.14, qui fera en outre un lien avec la géométrie projective.

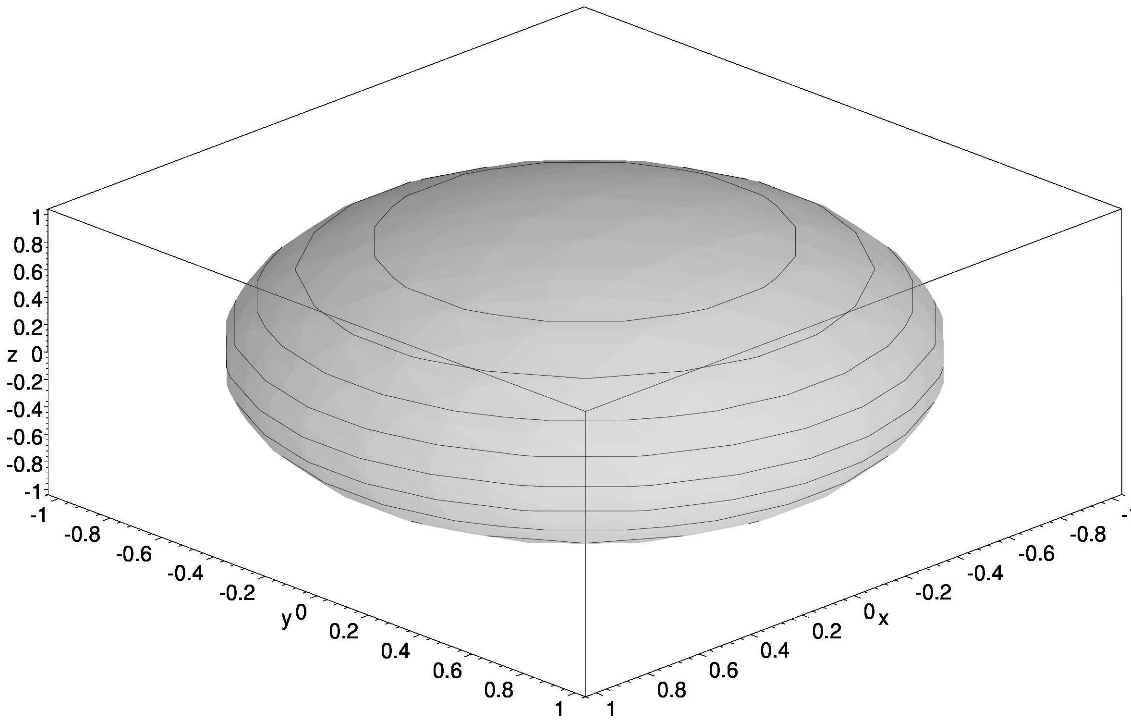
1.12.1 Étude de quadriques en dimension 3

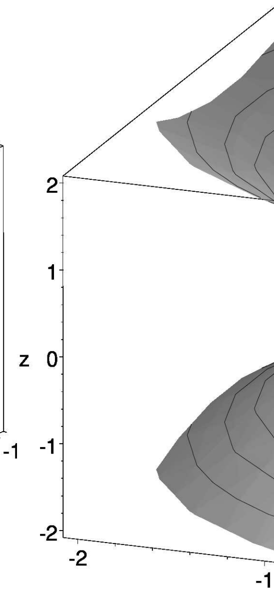
Les figures données ici sont obtenues avec Maple. Les commandes ne sont pas toutes données, car elles sont très similaires. On se contentera de donner la commande fournissant la figure **??** : il s'agit de

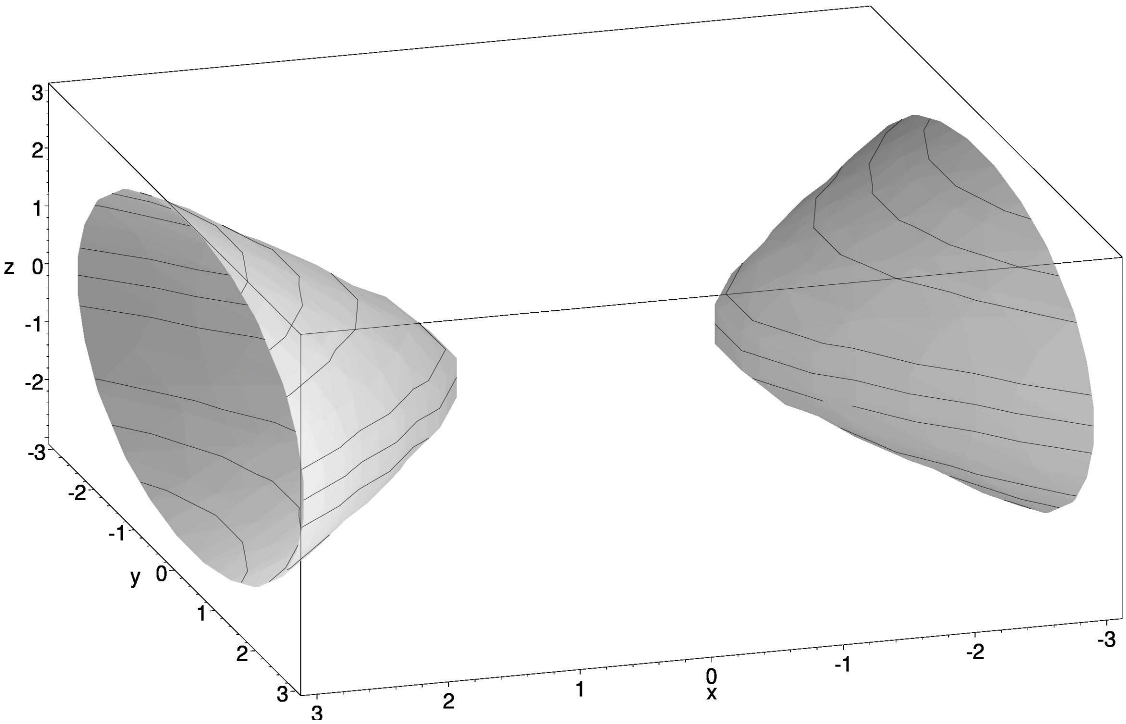
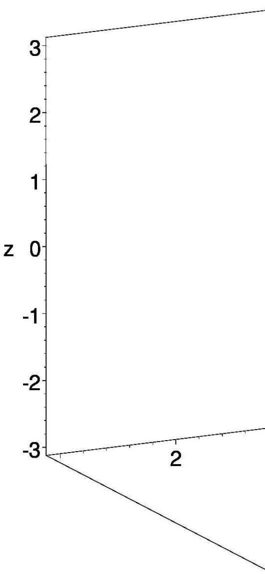
with(plots) ; implicitplod3d(x*x-y*y=z,x=-3..3,y=-3..3,z=-3..3,axes=BOXED,style=PATCHCONTOUR,numpoints=

Pour les autres figures, la modification de « numpoints » n'est pas utile.

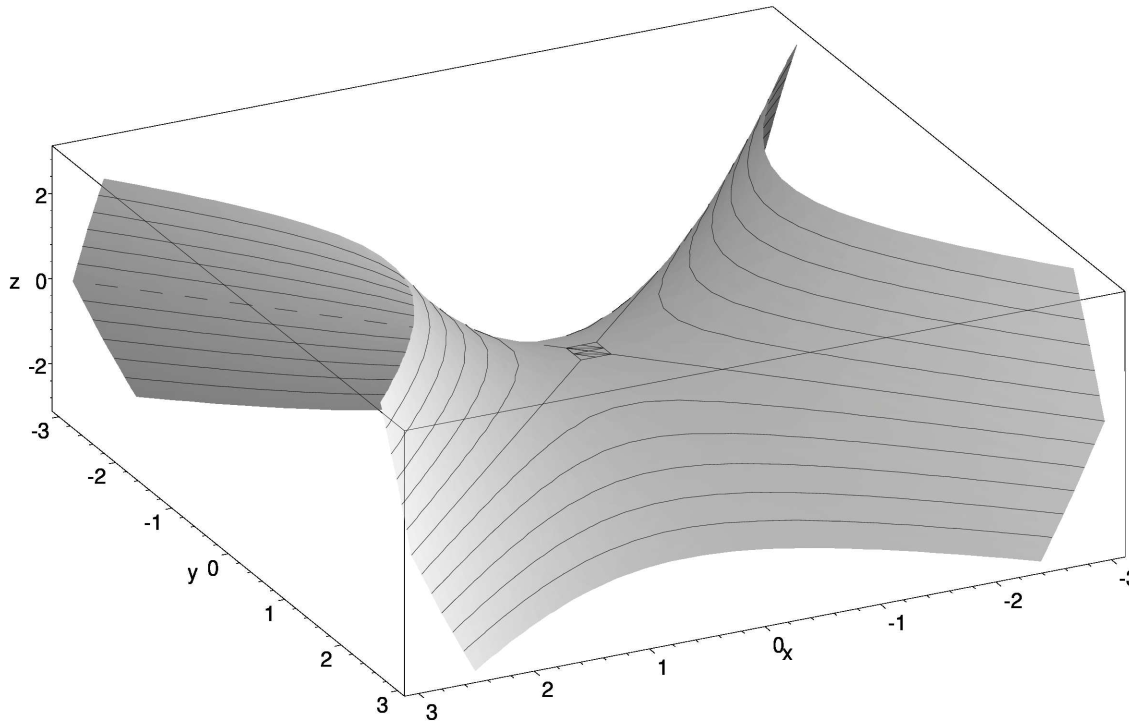
⊡ **Quadriques de rang 3 (alias quadriques à centre)** Ces quadriques sont celles de signature $(3,0)$ (ellipsoïde éventuellement réduit à un point, figure **??** à gauche), $(2,1)$ (hyperboloïde à 1 nappe **??** à droite, à 2 nappes figure **??** à gauche).






z
y
x
3
2
1
0
-1
-2
-3

z
3
2
1
0
-1
-2
-3

◎ **Quadriques de rang** 2



Ces quadriques sont le paraboloïde elliptique (figure **??**, à droite) et le paraboloïde hyperbolique (figure **??**).

1.12.2 Exemples très banals d'espaces affines

◎ **Espace vectoriel** On se donne E un espace vectoriel, par exemple $\mathbb{R}^n$; alors $X = E$ muni de l'application $(x, y) \mapsto \overrightarrow{xy} = y - x$ est un espace affine.

◎ **Avec une bijection sur un espace vectoriel** Étant donné X un ensemble et E un espace vectoriel avec f une bijection de X sur E, alors l'application $(x, y) \mapsto \overrightarrow{xy} = f(y) - f(x)$ de $X \times X$ dans E définit une structure d'espace affine sur X. En fait, tout espace affine peut se définir de cette façon ; mais il n'y a pas unicité de la fonction f (unicité à composition par une translation près toutefois).

1.12.3 Solutions d'un système linéaire

Étant donné un système linéaire $A.X = b$ avec A une matrice de type (n, p), X l'inconnue (vecteur colonne de dimension p), et b un vecteur colonne de taille n, l'ensemble des solutions est un espace affine, de direction l'espace vectoriel des solutions de $A.X = 0$.

S'il existe une solution, la dimension de l'espace affine des solutions est égal à $p - r$ avec r le rang de A.

Donc pour trouver toutes les solutions, il suffit de trouver une solution X_0, et l'espace des solutions est alors $X_0 + Ker(X \mapsto A.X)$.

1.12.4 Solutions d'une équation différentielle

⊡ **Du premier ordre** Étant donné I un intervalle de $\mathbb{R}$, u et v des applications continues de I dans $\mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle du premier ordre

$$y'(t) = u(t).y(t) + v(t)$$

forment un espace affine de direction l'ensemble des $y(t)$ tels que $y'(t) = u(t).y(t)$.

Cet espace affine est de dimension 1, sa direction est une droite vectorielle (de l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$) engendrée par l'application $x \mapsto \exp(U(x))$ (de I dans $\mathbb{R}$) avec $U' = u$ sur I.

⊡ **Du second ordre** Étant donné I un intervalle de $\mathbb{R}$, u, v et w des applications continues de I dans $\mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle du deuxième ordre

$$y''(t) = u(t).y'(t) + v(t).y(t) + w(t)$$

forment un espace affine de direction l'ensemble des $y(t)$ tels que $y''(t) = u(t).y'(t) + v(t)y(t)$.

Cet espace affine est de dimension 2, sa direction est un plan vectoriel (de l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$), dont on trouvera une base en utilisant la transformation donnée en partie **??** pour se ramener à une équation d'ordre 1.

1.12.5 Pour les algébristes, action du groupe additif d'un espace vectoriel sur un ensemble

On se donne X un ensemble quelconque, et E un espace vectoriel et on considère une action du groupe $(E, +)$ sur X ; on impose que cette action soit <u>fidèle et transitive</u>, c'est-à-dire que

$$e.(f.x) = (ef).x \text{ et } 0.x = x \text{ (définition d'une action)}$$

$$\text{et } \forall (x, y) \in X \ \exists! u \in E; u.x = y$$

(existence = transitivité, unicité = fidélité). Alors X est un espace affine de direction E pour l'application qui à (x, y) associe l'élément u tel que $u.x = y$.

⚠ *Attention 0.5* La notation multiplicative, usuelle pour les actions de groupe, est peut-être ici assez malvenue, du fait que l'on se retrouve avec $0.x = x$... On peut remplacer $e.x$ pour (e, x) dans $E \times X$ par $T_e(x)$, et employer le vocabulaire plus imagé des translations.

1.13 Géométrie projective

Après une introduction sur des cas simples, on définira la géométrie projective dans sa généralité en section 1.13.2. Le chapitre 1.14 fournira des éléments complémentaires. L'introduction de la section 1.13.2 comportera une justification de l'intérêt de la chose.

1.13.1 Homographies, birapport et droite projective

DÉFINITION - PROPOSITION 0.17 **1**

On appelle **droite projective associée au corps** $\mathbb{K}$ et on note $P^1(\mathbb{K})$ l'ensemble $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$, sur lequel on prolonge les lois d'addition et de multiplication en posant $x + \infty = \infty$ pour tout $x \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ et $x.\infty = \infty.x = \infty$ pour tout $x \in \mathbb{K}^* \cup \{\infty\}$, le produit $0.\infty$ n'étant pas défini. On prolonge la division en posant $x/\infty = 0$ pour tout x dans $\mathbb{K}$ et $x/0 = \infty$ pour tout $x \in \mathbb{K}^* \cup \{\infty\}$. Le quotient ∞/∞ n'est pas défini.

Toute application affine f de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ peut être prolongée en une application de $P^1(\mathbb{K})$ dans $P^1(\mathbb{K})$, en posant $f(\infty) = \infty$.

Soit M une matrice de $GL_2(\mathbb{K})$, noté $\begin{pmatrix} a & bc \\ d & \end{pmatrix}$; alors **l'homographie de** $P^1(\mathbb{K})$ **associée à** M est par définition l'application qui à x dans $P^1(\mathbb{K})$ associe

•$\frac{a.x+b}{c.x+d}$ si $c.x + d \neq 0$

•∞ si $c.x + d = 0$

•$\frac{a}{c}$ si $x = \infty$

On note cette application $H(M)$.

Si $c \neq 0$, $H(M)$ induit une bijection de $\mathbb{K} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ sur $\mathbb{K} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. On en déduit que $H(M)$ est une bijection de $P^1(\mathbb{K})$ sur $P^1(\mathbb{K})$. Si $c = 0$, la restriction de $H(M)$ à $\mathbb{K}$ est une bijection affine.

Un calcul simple montre que sa réciproque est l'homographie associée à l'inverse de la matrice M, à savoir celle définie dans le cas général par $x \mapsto \frac{dx-b}{-cx+a}$.

L'ensemble des homographies de $P^1(\mathbb{K})$ est un groupe pour la composition. On l'appelle **groupe projectif de** $\mathbb{K}$; on le note $GP^1(\mathbb{K})$.

L'application qui à M associe $H(M)$ est un morphisme du groupe $GL_2(\mathbb{K})$ dans $GP^1(\mathbb{K})$. Son noyau est l'ensemble $(\mathbb{K}^*).I$, c'est-à-dire le groupe des matrices non nulles proportionnelles à la matrice identité (ce noyau, comme tout noyau d'un morphisme de groupe, est distingué).

On en déduit donc $GP^1(\mathbb{K}) \simeq GL_2(\mathbb{K})/\mathbb{K}^*.I = PGL_2(\mathbb{K})$.

DÉFINITION - PROPOSITION 0.18 **1**

Étant donné une droite affine D (c'est-à-dire un espace affine de dimension 1), on peut considérer sa **droite projective complétée** $\widetilde{D}$, consistant en $D \cup \{\infty\}$. Une abscisse m sur D se prolonge en une bijection de $\widetilde{D}$ sur $P^1(\mathbb{K})$, par $m(\infty) = \infty$; cette application sera encore appelée **abscisse**, sur $\widetilde{D}$.

On appelle **homographie de** $\widetilde{D}$ **sur** $\widetilde{D}'$ une application h de D sur D' telle qu'il existe des abscisses m et m' respectivement sur $\widetilde{D}$ et $\widetilde{D}'$ telles que $h = m'^{-1} \circ H \circ m$, avec H une homographie de $P^1(\mathbb{K})$.

Une composée d'homographies (quel que soit le contexte) est encore une homographie.

Une homographie est toujours bijective.

L'ensemble des homographies de $\widetilde{D}$ sur lui-même forme un groupe pour $\circ$, isomorphe à $GP^1(\mathbb{K})$; on le note $GP(\widetilde{D})$, et on l'appelle **groupe projectif de** $\widetilde{D}$.

Étant donné E une droite affine munie d'un repère affine, donc d'une abscisse, on se donne 4 points A, B, C et D <u>distincts</u> d'abscisses respectives a, b, c et d. On appelle **birapport de** A**,**

B, C **et** D et on note $[A,B,C,D] = \frac{a-c}{a-d}.\frac{b-d}{b-c}$.

On a les propriétés suivantes du birapport :

•le birapport est indépendant de l'abscisse choisie.

•le birapport n'est pas indépendant de l'ordre.

•$[A,B,C,D] = [C,D,A,B]$

•$[A,B,C,D] = \frac{1}{[A,B,D,C]} = \frac{1}{[B,A,C,D]}$

•$[A,B,C,D] + [A,C,B,D] = 1$

Notons que $x \mapsto [A,B,C,x]$ est une homographie. Prolongeons-là.

Ainsi, on prolonge le birapport au cas où l'un des points est ∞, de la manière logique intuitivement, c'est-à-dire que les termes incluant ∞ « se compensent ». Ainsi on a par exemple

$$[A,B,C,\infty] = \frac{a-c}{b-c}$$

$$[A,B,\infty,D] = \frac{b-d}{a-d}$$

$$[A,\infty,C,D] = \frac{a-c}{a-d}$$

$$[\infty,B,C,D] = \frac{b-d}{b-c}$$

Ensuite, on prolonge le birapport au cas où deux points sont égaux :

$$[A,A,C,D] = [A,B,C,C] = 1$$

$$[A,B,A,D] = [A,B,C,B] = 0$$

$$[A,B,C,A] = [A,B,B,D] = \infty$$

Le birapport est invariant par homographie : $\forall A,B,C,D \in P^1(\mathbb{K}), \forall f \in PGL_2(\mathbb{K}), [f(A),f(B),f(C),f(D)] = [A,B,C,D]$.

Définition - proposition 0.19 **1**

Toute homographie de $\widetilde{D}$, avec D une droite affine, s'exprime de manière unique sous la forme $M \mapsto [M,A,B,C]$ pour un certain triplet (A,B,C) de points distincts de $\widetilde{D}$. On appelle **repère projectif de** $\widetilde{D}$ un triplet A,B,C de points distincts, et $[M,A,B,C]$ est appelé **coordonnée de** M **dans le repère projectif** (A,B,C).

L'application qui à un point associe sa coordonnée dans un repère projectif est égale à composition par une homographie près à l'application qui à un point associe sa coordonnée dans un autre repère projectif.

Étant donné deux triplets de points distincts (A,B,C) et (A',B',C') respectivement sur $\widetilde{D}$ et $\widetilde{D}'$ (deux droites projectives), il existe une et une seule homographie h de $\widetilde{D}$ sur $\widetilde{D}'$ telle que $h(A) = A'$, $h(B) = B'$ et $h(C) = C'$.

Étant donné deux quadruplets de points distincts (A,B,C,D) et (A',B',C',D') respectivement sur $\tilde{E}$ et $\tilde{E}'$ (deux droites projectives), il existe une homographie h de $\tilde{E}$ sur $\tilde{E}'$ telle que

$h(A) = A'$, $h(B) = B'$, $h(C) = C'$ et $h(D) = D'$ si et seulement si $[A, B, C, D] = [A', B', C', D']$.

Une bijection entre deux droites projectives est une homographie si et seulement si elle conserve le birapport.

Étant donné $\widetilde{D}$ une droite projective, et $d \in \widetilde{D}$, $\widetilde{D}$ induit sur $E = \widetilde{D} \setminus \{d\}$ une structure de droite affine ; $GA(E)$ est l'ensemble des applications induites sur E par des homographies de $\widetilde{D}$ dont d est un point fixe (on en déduit donc que tous les points de $\widetilde{D}$ jouent le même rôle, même ∞).

Théorie

Visualisation On considère le plan vectoriel $\mathbb{K}^2$ muni de sa base canonique, et l'ensemble $\widetilde{D}$ des droites vectorielles de $\mathbb{K}^2$ (donc seulement les droites affines passant par l'origine).

On note $\mathbb{D}$ la droite $\mathbb{K} \times \{0\}$ et D l'ensemble $\widetilde{D} \setminus \{\mathbb{D}\}$.

Étant donné d appartenant à $\widetilde{D}$, on considère $x(d)$ l'abscisse de son intersection avec la droite $\mathbb{K} \times \{1\}$, et on pose $x(\mathbb{D}) = \infty$.

D est une droite affine pour l'application qui à deux droites d et d' associe $\overrightarrow{dd'} = x(d') - x(d)$. $\widetilde{D}$ en est une droite projective complétée. Une abscisse x' sur D, qui est affine par rapport à $d \mapsto x(d)$, se complète en une abscisse sur $\widetilde{D}$ par $x'(\Delta) = \Delta$.

On peut donc visualiser la droite projective $P^1(\mathbb{K})$ comme l'ensemble des droites vectorielles du plan euclidien $\mathbb{K}^2$.

On peut aussi considérer la droite projective complétée comme un quotient de l'ensemble des points non nuls du plan $\mathbb{K}^2$, en considérant des classes d'équivalence égales aux droites vectorielles privées de 0. L'image est sans doute d'autant plus visualisable, car l'homographie $h(M)$ pour $M \in GL_2(\mathbb{K})$ est alors le passage quotient de la multiplication par M dans $\mathbb{K}^2$.

En identifiant un point d'abscisse t dans un repère affine à la classe d'équivalence $\mathbb{K}.(t, 1)$ si $t \neq \infty$ et à la classe d'équivalence $\mathbb{K}.(1, 0)$ sinon, on peut identifier toute droite projective complétée à l'ensemble des classes d'équivalence précédemment définies de $\mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$.

Ainsi une homographie dans une droite projective complétée est l'application quotiente d'une transformation linéaire dans $\mathbb{K}^2$.

Il reste maintenant à définir les espaces projectifs de dimension supérieure.

1.13.2 Espaces projectifs

Les espaces projectifs sont construits dans divers buts :

— supprimer la distinction entre droites sécantes et droites parallèles ;

— rendre l'espace compact (à cet égard voir aussi le compactifié d'Alexandrov) ;

— [1] souligne aussi l'intérêt des espaces projectifs pour le dessin assisté par ordinateur.

Ils fournissent aussi un cadre pour étudier la sphère (les espaces projectifs sont liés par une application sympathique à la sphère ; voir le théorème **??**). Le plan de Fano est un exemple très petit d'espace projectif. On trouvera dans [2] des applications d'espaces projectifs pour des analyses de discrépance.

Définition 0.20 **espace projectif associé à** E

Étant donné E un espace vectoriel de dimension finie, on appelle **espace projectif associé à** E l'ensemble $P(E)$ des droites vectorielles de E. On note $P^{n-1}(\mathbb{K})$ pour $P(\mathbb{K}^n)$.

On appelle **dimension de** $P(E)$ la dimension de E moins un.

On appelle **droite (projective) de** $P(E)$ l'image d'un plan vectoriel de E, **plan projectif de** $P(E)$ l'image d'un sous-espace vectoriel de E de dimension 3, **sous-espace projectif de** $P(E)$ **de dimension** q l'image d'un sous-espace vectoriel de E de dimension $(q+1)$, **hyperplan projectif de** $P(E)$ l'image d'un hyperplan vectoriel de E, sous-espace projectif de $P(E)$ engendré par q points de $P(E)$ (i.e. q droites de E) l'image du sous-espace vectoriel de E engendré par les q droites correspondantes.

On note $< P >$ le sous-espace projectif de $P(E)$ engendré par une partie P incluse dans $P(E)$.

On dit de q points de $P(E)$ qu'ils sont **projectivement indépendants** si les droites correspondantes sont en somme directe dans E, c'est-à-dire s'ils engendrent un sous-espace projectif de $P(E)$ de dimension $(q-1)$.

On dit de n points $x_1, ..., x_n$ de $P(E)$ qu'ils forment un **repère projectif de** $P(E)$ si la dimension de $P(E)$ est $n-2$ et si toute sous-famille de $n-1$ points des x_i est projectivement indépendante.

On dit de x dans $P(E)$ qu'il a pour **coordonnées homogènes** $(t_1, ..., t_n)$ **dans un certain repère projectif** $(d_0, d_1, ..., d_n)$ si un certain y appartenant à x a pour coordonnées $(t_1, ..., t_n)$ dans une base $(e_0, ..., e_{n-1})$ avec $e_n = \sum_{i=[1,n-1]} e_i$ et $d_i =< e_i >$ pour tout $i \in [1, n]$.

La théorie ⚠ *Attention 0.6* Ne pas confondre avec l'ensemble des parties de E !

⚠ *Attention 0.7* Ne pas confondre avec l'ensemble des parties de E !

Cette définition des espaces projectifs prolonge celle des droites projectives donnée plus tôt.

⚠ *Attention 0.8* Les coordonnées homogènes ne sont pas uniques, même dans un repère donné ! Par contre elles sont unique à multiplication par un scalaire non nul près. La preuve en sera plus facile après certaines autres propositions → voir plus loin.

Proposition 0.13

Étant donné F et G deux sous-espaces projectifs d'un espace projectif $P(E)$, on a

$$\dim F + \dim G = \dim < F \cup G > + \dim (F \cap G).$$

Définition - proposition 0.21 **1**

Sur les repères projectifs

•Si $(y_1, ..., y_{n-1})$ est une base de E, et si les x_i pour $i \in [1, n]$ sont des éléments de $P(E)$ avec $y_i \in x_i$, et $\sum_{i=1..n-1} y_i \in x_n$ (intuitivement x_n est l'isobarycentre des x_i pour $i \in [1, n-1]$ - la division par n est superflue puisque l'on travaille dans $P(E)$ à une constante multiplicative près), alors $(x_1, ..., x_n)$ est un repère projectif de $P(E)$.

•Réciproquement, si $(x_1, ..., x_n)$ est un repère projectif de $P(E)$, alors il existe $(y_1, ..., y_{n-1})$ une base de E, avec $y_i \in x_i$, et $\sum_{i=1..n-1} y_i \in x_n$.

Pour bien voir ce que signifie ce résultat, il faut comprendre que n'importe quel repère projectif s'exprime donc comme l'image d'une base par la surjection canonique de $E \setminus \{0\}$ sur son quotient PLUS l'image de la somme des éléments de cette base.

Une famille $(y_i)_{i\in[1,n-1]}$ et une famille $(x_i)_{i\in[1,n]}$ étant définies comme dans le deuxième point, la base $(y_i)_{i\in[1,n-1]}$ et le repère projectif $(x_i)_{i\in[1,n]}$ sont dits **associés**.

Démonstration

Remarquons tout d'abord que pour que des droites x_i soient en somme directe, il faut et il suffit qu'une famille quelconque de y_i avec y_i engendrant x_i soit libre ; dans ce cas, toute famille de y_i avec y_i engendrant x_i est libre.

Dans la suite, nous assimilons « y engendre x » à « y engendre la droite vectorielle engendrée par x », lorsque y est un point de E et x une droite vectorielle privée de 0.

•La famille $x_1, ..., x_{n-1}$ est clairement projectivement indépendante. Il reste à voir que n'importe quelle autre famille de $(n-1)$ éléments est projectivement indépendante. Pour cela, on peut se contenter de la famille $x_2, ..., x_n$, puisque la situation est invariante par permutation des termes du vecteur[1]. On se donne alors $y_1, ..., y_n$ dans E engendrant respectivement $x_1, ..., x_n$. Si $(y_1, ..., y_{n-1})$ est une base de E et $y_n = y_1 + ... + y_{n-1}$, alors la famille obtenue à partir de $(y_1, ..., y_{n-1})$ en remplaçant n'importe quel vecteur par y_n est de nouveau une base de E, si bien que n'importe quelle famille de $(n-1)$ éléments parmi $x_1, ..., x_n$ est projectivement indépendante : $(x_1, ..., x_n)$ est un repère projectif de $P(E)$.

•On se donne y'_i engendrant x_i dans E. Par définition, les y'_i pour $i \in [1, n-1]$ forment une famille libre de E, donc une base de E. Donc y'_n est combinaison linéaire des y'_i pour $i \in [1, n-1]$. On écrit alors

$$y'_n = \sum_{i\in[1,n-1]} \lambda_i.y'_i$$

puis $y_n = y'_n$ et $y_i = \lambda_i.y'_i$ pour $i \in [1, n-1]$, et on a le résultat souhaité sous réserve que les λ_i soient non nuls.

•Les λ_i sont tous non nuls ; en effet, dans le cas contraire, une sous-famille d'au plus $n-1$ vecteurs parmi $y'_1, ..., y'_n$.

PROPOSITION 0.14 **Coordonnées homogènes**

Les coordonnées homogènes dans un repère donné sont uniques à multiplication par un scalaire non nul près.

Démonstration *•Les y_i donnés par le deuxième point de la proposition ci-dessus sont uniques à multiplication par un scalaire non nul près (comme on s'en convaincra en consultant la preuve ci-dessus).*

•Les coordonnées homogènes sont donc uniques à multiplication par un scalaire non nul près.

1. σ_n agit transitivement sur les paires de $\{1, ..., n\}$, donc, par passage au complémentaire, sur les paires de $(n-1)$-uplets de $\{1, ..., n\}$

Proposition 0.15 **Propriétés des espaces projectifs**

•Dans un espace projectif, par deux points distincts passe une droite et une seule.
•Dans un espace projectif, l'intersection d'une droite et d'un hyperplan qui ne la contient pas est constituée d'un point et d'un seul.

Proposition 0.16 **Propriétés des plans projectifs**

Dans un plan projectif :
•Deux droites distinctes se coupent en un point et un seul $\rightarrow$ pas de droites sans point commun !

On a défini laborieusement les homographies dans une droite projective ; on va maintenant les définir dans un espace projectif de dimension quelconque.

Définition 0.22 **Homographies**

Soit E et F des espaces vectoriels de même dimension finie, et $f \in Isom(E, F)$. Alors f conservant l'alignement, on peut restreindre f à E privé de 0 et F privé de 0, on a encore une bijection ; on peut alors considérer l'application quotient de f ; on obtient une bijection de $P(E)$ sur $P(F)$. Cette application est appelée **homographie de** $P(E)$ **sur** $P(F)$.

Une **matrice associée à une homographie de** $P(E)$ **dans** $P(F)$ **dans des repères projectifs** R **et** R' (de $P(E)$ et $P(F)$ respectivement) est la matrice dans des bases associées à R et R' d'un certain isomorphisme de E dans E' engendrant cette homographie. Un endomorphisme ayant pour matrice cette même matrice dans les mêmes bases est dit lui aussi **associé** à cette homographie.

⚠ *Attention 0.9* Il n'y a pas unicité des matrices associées à une homographie ! Ni des endomorphismes ! Il y a par contre unicité à multiplication par un scalaire près, comme on le vérifie dans la partie **??**.

Proposition 0.17

Soit R un repère projectif de $P(E)$ et R' un repère projectif de $P(E)$. Avec $x \in P(E)$ et X un vecteur de coordonnées homogènes de x dans R et M une matrice associée à l'homographie H de $P(E)$ dans $P(F)$ pour les repères R et R', $M.X$ est un vecteur de coordonnées homogènes de $H(x)$ dans R'.

Proposition 0.18

La restriction d'une homographie à un sous-espace projectif est une homographie.

Étant donné $P(E)$ et $P(F)$ deux espaces projectifs de même dimension et R_E et R_F des repères projectifs de $P(E)$ et $P(F)$ respectivement ; alors il existe une unique homographie de $P(E)$ sur $P(F)$ par laquelle R_F soit l'image de R_E.

Définition 0.23 **groupe projectif de E**

L'ensemble des homographies d'un espace projectif $P(E)$ sur lui-même forme un groupe pour $\circ$; on l'appelle **groupe projectif de** E, et on le note $PGL(E)$.

D'après la proposition précédente, $PGL(E)$ agit simplement transitivement sur l'ensemble des repères projectifs de $P(E)$. On trouvera plus d'informations à **??**.

La visualisation On a introduit les espaces projectifs en considérant les classes d'équivalence d'un espace vectoriel de dimension finie privé de 0 pour la relation d'équivalence « appartenir à la même droite vectorielle ». Certes cette représentation est elle-même bien imagée et intuitive. Toutefois il reste à fournir une représentation rappelant plus la géométrie affine.

On identifie abusivement une droite vectorielle et la même droite privée de 0 dans la suite de ce paragraphe.

On se donne f une forme linéaire non nulle sur un espace vectoriel E de dimension finie. On considère l'hyperplan affine $F = \{x; f(x) = 1\}$, de direction $\overrightarrow{F}$ avec $\overrightarrow{F} = \{x; f(x) = 0\}$. On considère alors l'ensemble X des éléments de $P(E)$ qui intersectent F ; il est clair qu'il s'agit du complémentaire dans $P(E)$ de $P(\overrightarrow{F})$. On peut en outre l'identifier à F, par l'application qui à un élément de X associe son intersection avec F.

L'ensemble des droites vectorielles contenues dans $\overrightarrow{F}$ est un hyperplan projectif de $P(E)$. L'application qui à une homographie h de $P(E)$ laissant $\overrightarrow{F}$ invariant associe l'application g de F dans F définie par $g(x) = h(x)$ (rappelons que l'on a identifié X et F) est un morphisme injectif de $PGL(E)$ dans $GA(F)$.

En outre pour toute droite affine D de F, il existe un unique point D_∞ de $\overrightarrow{F}$ tel que $D \cup \{D_\infty\}$ soit une droite projective. On a $D_\infty = D'_\infty$ si et seulement si D est parallèle à D'. Enfin l'application qui à une droite de $P(E)$ non contenue dans $\overrightarrow{F}$ associe son intersection avec F est une bijection de l'ensemble des droites projectives de $P(E)$ non contenues dans $\overrightarrow{F}$ dans l'ensemble des droites affines de F.

On peut donc voir $P(E)$ comme un hyperplan de E, muni en outre de points à l'infini complétant les droites, correspondant à la direction d'une droite (i.e. deux droites parallèles ont même direction) ; les droites contenues dans $\overrightarrow{F}$ sont en fait les droites constituées uniquement de points à l'infini.

Enfin il faut bien noter que la notion de point à l'infini est relative ; n'importe quel point de $P(E)$ pourrait être un point à l'infini en choisissant F convenablement.

Pour le redire autrement, un espace projectif est un espace vectoriel, muni de points à l'infini pour compléter les droites ; deux droites parallèles ont alors un point d'intersection à l'infini.

Définition 0.24 **complété projectif de H**

Un hyperplan affine H de E ne passant pas par 0, identifié à l'ensemble des éléments de $P(E)$ qui ne sont pas inclus dans $\overrightarrow{H}$, comme précédemment, et complété par les points à l'infini correspondant à ses droites, est appelé **complété projectif de** H.

Étant donné H un hyperplan affine de E ne passant pas par 0, $\overrightarrow{H}$ est appelé l'**hyperplan à l'infini** du complété projectif de E.

Pour y voir clair, une visualisation en petite dimension sera pratique.

⊡ **En dimension** 1 Un espace projectif de dimension 1 est une droite projective, c'est-à-dire une droite affine, avec en outre un point à l'infini. La droite projective sur $\mathbb{R}$ peut aussi être vue comme un cercle où les points diamétralement opposés sont identifiés.

⊡ **En dimension** 2 Un espace projectif de dimension 2 est un plan projectif, c'est-à-dire un plan affine, avec en outre des points à l'infini. On peut se représenter cela par un plan, avec un cercle à l'infini ; une droite peut être soit une droite du plan, avec en bonus les deux points du cercle correspondant à sa direction, soit l'unique droite constituée des points à l'infini.

On peut aussi voir le plan projectif réel comme la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, en identifiant les points diamétralement opposés.

⊡ **En dimension** 3 Un espace projectif de dimension 3 peut se représenter comme un espace tridimensionnel classique, muni de points à l'infini (qu'on peut se représenter comme une sphère loin loin loin). Les droites en sont les droites usuelles (munies des deux points correspondant sur la sphère), plus les grands cercles (i.e. de diamètre maximal) de la loin-loin-lointaine sphère.

⊡ **Le cas général** Un espace projectif de dimension n peut se représenter comme un espace affine de dimension n, muni de points à l'infini correspondant aux directions des droites. C'est-à-dire que les points à l'infini sont un espace projectif de dimension $(n-1)$.

Il est très important de noter que, comme le laisse comprendre la méthode imagée de voir tout ça, n'importe quel hyperplan peut être considéré comme l'hyperplan à l'infini.

Liste de résultats de géométrie projective Pour prouver les résultats qui suivent, il suffit généralement de traduire la question en termes d'espaces vectoriels.

PROPOSITION 0.19

- Soit H un hyperplan projectif d'un espace projectif E. Soit x un point de $E \setminus H$; alors toute droite projective passant par x intersecte H.
- Si F et G sont deux sous-espaces projectifs de E de dimensions f et g, avec $f + g \geq n$, alors F et G ont une intersection non vide.
- Deux droites distinctes d'un plan projectif ont un point d'intersection.

THÉORÈME 0.20 **Compacité des espaces projectifs**

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, muni de sa topologie usuelle, héritée de n'importe quelle norme (toutes les normes étant de toute façon équivalentes en dimension finie) ; alors l'espace projectif $P(E)$ est compact pour la topologie quotient.

Topologie des espaces projectifs réels ou complexes

Démonstration

•On considère la sphère unité de E. Cette sphère contient exactement deux points de chaque droite vectorielle de E ; l'image de la sphère unité par la projection est donc exactement $P(E)$. $P(E)$ est donc l'image d'un compact par une application continue, et donc est compacte sous réserve que $P(E)$ soit séparé (voir théorème **??***). Il suffit donc pour conclure de vérifier que $P(E)$ est séparé.*

•On se donne deux droites vectorielles D et D' distinctes de E ; on considère deux couples de points x, y et x',y' de E, avec $\{x,y\} = D \cap S$ et $\{x',y'\} = D' \cap S$ (S désigne la sphère unité).

•Il existe quatre ouverts X, X', Y et Y' de S disjoints, avec $x \in X$, $y \in Y$, $x' \in X'$ et $y' \in Y'$.

•On considère alors l'intersection des projections de X et Y d'une part, et l'intersection des projections de X' et Y' d'autre part (rappelons que la projection canonique sur un ensemble quotient est ouverte lorsque les classes d'équivalence sont les orbites pour une action d'un groupe sur un espace topologique par homéomorphismes, voir proposition **??***) ; on obtient ainsi deux ouverts distincts séparant nos deux droites.*

Théorème 0.21 **Connexité par arcs des espaces projectifs de dimension ≥ 1**

Un espace projectif de dimension ≥ 1 est connexe par arcs.

Démonstration *Rappelons juste que l'image d'un espace connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.*

On peut noter que le résultat est vrai aussi pour l'espace projectif de dimension 0 (réduit à un singleton) bien que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ne soit pas connexe.

1.14 Zoologie de la géométrie

La vieille géométrie remonte selon les auteurs aux alentours de -3000, et les « Éléments » d'Euclide dateraient d'environ 300 avant JC. Le fameux théorème de Pythagore remonterait au 6ème siècle avant JC et aurait entraîné divers problèmes philosophiques liés à l'irrationalité (l'incommensurabilité). Il faudra par contre attendre le 19ème siècle pour que le polémique postulat des parallèles soit remis en cause. Précisément, ce postulat avait été remis en cause nombre de fois au sens où les gens avaient essayé de le démontrer à partir des autres axiomes, afin d'en faire un théorème plutôt qu'un axiome ; les mathématiciens ne s'étaient pas trompé en sentant que ce postulat était plus complexe, moins naturel que les autres axiomes : on peut (comme pour l'axiome du choix en théorie des ensembles) dire des choses intéressantes en le supprimant et en choisissant un autre jeu d'axiomes à la place. De manière amusante, la théorie des ensembles permet de construire des modèles de chacune de ces géométries, montrant ainsi que toutes ont leur consistance (si ZF est consitant). Naissent alors des géométries non-euclidiennes :

— plus de parallèles du tout : la géométrie elliptique (penser aux espaces projectifs, qui sont bien construits à partir de la théorie des ensembles et sont donc bien des modèles de géométrie elliptique, où il n'y a pas de parallèle) [2] ;

— plein de parallèles différentes (au sens : une droite est parallèle à une autre si elles ne se touchent jamais) à une droite donnée passant par un point donné : la géométrique dite hyperbolique (penser à la restriction d'un espace euclidien à une boule - là aussi, la construction d'espaces euclidiens étant possibles en théorie des ensembles, on voit bien ainsi apparaître un

2. Ceux qui n'ont pas étudié la géométrie projective peuvent penser aux paires de points antipodaux sur une sphère.

modèle de géométrie où on peut trouver plein de « parallèles » - c'est-à-dire ici des segments maximaux de la boule à une droite donnée passant par un point donné).

Ces géométries moins intuitives (et d'autres qu'on ne citera pas ici, par exemple les variétés de Calabi-Yau en théorie des cordes) auront leur heure de gloire avec l'avènement de la relativité en physique, qui va très au-delà de cet ouvrage.

Cette partie concerne tant la géométrie affine que la géométrie projective et la théorie des groupes ou des polygones et polyèdres réguliers. En fait la géométrie projective et la géométrie affine sont souvent liées ; et certains théorèmes de géométrie affine seront prouvés par la géométrie projective (et réciproquement). La première section « étude de courbes » (1.14.1), toutefois, est résolument affine. Les deux sections suivantes feront un lien avec la géométrie projective : dualité (1.14.2), géométries du plan et du plan projectif (1.14.3). On aura ensuite des liens avec la théorie des groupes : groupes orthogonaux et polygones et polyèdres réguliers (1.14.4), la célèbre droite de Simson (liée aux polynômes symétriques) et le cercle des neuf points (1.14.5,1.14.6).

1.14.1 Étude de courbes

Définition 0.25 **Position d'une courbe par rapport à sa direction**

Étant donné γ un arc suffisamment dérivable de $[0, a]$ dans $\mathbb{R}^d$, on considère (si elles existent) ses premières dérivées non nulles $d1 = \frac{d^m\gamma}{dt^m}$ et $d2 = \frac{d^n\gamma}{dt^n}$ en $t \in [0, a]$ telles que $d1$ et $d2$ ne soient pas colinéaires [3].

On dit que :

— $\frac{d\gamma}{dt}$ est appelé **vitesse** de γ en t. On dit que l'arc est une **abscisse** ou **abscisse curviligne** si la vitesse a une norme constante égale à 1.

— la droite passant par $\gamma(t)$ et de direction $d1$ est appelé **direction** de γ en t.

— t, ou $\gamma(t)$ s'il n'existe pas $u \neq t$ tel que $\gamma(t) = \gamma(u)$, est un **point d'inflexion** si m et n sont impairs (la courbe change alors en t de côté par rapport à sa direction en t).

— t (ou $\gamma(t)\dots$) est un **point de rebroussement de première espèce** si m est pair et n est impair (la courbe « rebrousse chemin » et change alors en t de côté par rapport à sa direction en t).

— t (ou $\gamma(t)\dots$) est un **point de rebroussement de seconde espèce** si m et n sont pairs (la courbe « rebrousse chemin » et ne change alors pas en t de côté par rapport à sa direction en t).

On parle de cas général si m est impair et n est pair ; la courbe ne change alors pas en t de côté par rapport à sa direction en t.

Définition 0.26 **Trièdre de Frenet**

On appelle **trièdre de Frenet** en t (avec les notations ci-dessus) de l'arc au moins C^2 γ, lorsque γ est une abscisse curviligne et lorsque les quantités qui suivent sont bien définies, le trièdre (i,j,k) défini par $i=\gamma'(t)$, $j=\frac{1}{\|\frac{di}{dt}\|}\frac{di}{dt}$, k le produit vectoriel de i et j. $\|\frac{di}{dt}\|$ est appelé **courbure** en t. Son inverse $1/\|\frac{di}{dt}\|$ est appelé **rayon de courbure** en t. La **torsion** est $\|\frac{dk}{dt}\|$.

La droite passant par t et de direction i est appelée **tangente** en t (ou $\gamma(t)$ lorsque cela ne prête pas à confusion).

Rappelons que la longueur d'un arc est l'intégrale de la norme de sa vitesse. Si la torsion est toujours nulle, la courbe est entièrement contenue dans un plan.

Si un arc a une vitesse toujours non nulle, on peut le reparamétrer en une abscisse curviligne. Il suffit en effet d'étudier $\gamma\circ\varphi^{-1}$, avec $\varphi(s)=\int_{s_0}^{s}\|\gamma'(s)\|\,ds$.

1.14.2 La dualité

⊡ **Quelques rappels d'algèbre linéaire** On considère un espace vectoriel E de dimension finie. On note, classiquement, E^* son dual (i.e. l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E, c'est-à-dire, puisque E est de dimension finie, l'espace vectoriel des formes linéaires sur E).

Étant donné F un sous-espace vectoriel de E, on note F' l'ensemble des formes linéaires nulles sur tout F. Il est clair que F' un sous-espace vectoriel de E^* (voir la partie sur l'algèbre linéaire). On a $dim\ F + dim\ F' = dim\ E$, et $dim\ E^* = dim\ E$.

Rappelons que $F\subset G$ dans E équivaut à $G'\subset F'$ dans E^*.

⊡ **Le lien avec la géométrie projective** Notons maintenant bien ce qu'il se passe, lorsque l'on identifie E à E^* :

On suppose que E est de dimension n, et on note π_E la surjection canonique de E dans $P(E)$.

Primal		Dual	
dans E	dans $P(E)$	dans E^*	dans $P(E^*)$
$dim\ E=n$	$dim\ P(E)=n-1$	$dim\ E^*=n$	$dim\ P(E^*)=n-1$
$F\subset E$	$\pi_E(F)$	F'	$\pi_{E^*}(F')$
$dim\ F=f$	$dim\ \pi_E(F)=f-1$	$dim\ F'=n-f$	$dim\ \pi_{E^*}(F')=n-f-1$
$D=$ droite	$\pi_E(D)=$ point	hyperplan (vectoriel)	hyperplan (projectif)
$G=$ hyperplan (vectoriel)	$\pi_E(G)=$ hyperplan (projectif)	$G'=$ droite	point

(π_E est la projection canonique de E sur son projectif)

On peut aller plus loin, en traduisant cette fois-ci les relations d'inclusion et d'intersection. On note par la suite par des lettres les éléments de $P(E)$, et par les mêmes lettres munies d'un $'$ leurs images dans $P(E^*)$.

dans $P(E)$	dans $P(E^*)$
$A\subset B$	$B'\subset A'$
$A\in B$	$B'\in A'$

On peut ensuite spécialiser à la dimension 2 : les lettres majuscules désignent des droites, les lettres minuscules des points ; la même lettre désigne un élément et son dual ; on ne fait que passer de minuscule à majuscule, et réciproquement.

dans $P(E)$ ($dim(E) = 2$)	dans $P(E^*)$
a (un point)	A une droite
$a = B \cap C$	$A = (bc)$
A, B, C concourantes	a, b, c alignés
Triangle de côtés A, B et C	Triangle de sommets a, b et c

Tout cela se passe en projectif. En effet, en projectif, il est vrai que deux droites se croisent toujours en un point (dual du fait que par deux points passent toujours une droite), ce qui ne serait pas vrai en géométrie euclidienne standard !

Application 0.10 On verra une application fort sympathique avec le théorème de Desargues 0.24 (version géométrie projective).

1.14.3 Géométrie dans le plan et dans le plan projectif

THÉORÈME 0.22 **Théorème de Pappus**

Soient D et D' deux droites du plan, distinctes.
Soient A, B et C trois points de D, et A', B' et C' trois points de D'.
Si AB' est parallèle à BA',
et si CB' est parallèle à BC',
alors AC' est parallèle à CA',

Théorème de Pappus en géométrie affine

Démonstration

•*Supposons tout d'abord que D et D' ne soient pas parallèles. Alors on considère O leur point d'intersection.*

•*On oriente les deux droites D et D', et on constate que $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$ et que $\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OC'}}$ (par la réciproque du théorème de Thalès).*

•*On en déduit que $\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OA'}}$, ce qui par Thalès nous donne bien le résultat souhaité.*

Notez qu'il est possible de raisonner sur des homothéties pour se débarasser des cas particuliers OC=0, etc. Il suffit de remplacer «$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$» par « il existe une homothétie h centrée sur O telle que $h(A) = B$ et $h(B') = A'$».

•*Le cas D et D' parallèles n'est pas plus difficile, on utilise des translations pour exprimer les parallélismes...*

Théorème de Desargues On verra le théorème de Desargues sous deux formes, en géométrie affine et en version projective, la version projective fournissant une jolie démonstration de la réciproque. La réciproque étant valable aussi dans l'affine, on a ainsi une application de la géométrie projective en géométrie affine !

THÉORÈME 0.23 **Théorème de Desargues**

On se donne ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommet commun et à côtés respectivement parallèles[4]. Alors AA', BB' et CC' sont concourantes ou parallèles.

⊡ **En géométrie affine**

Démonstration

•Premier cas : AA' et BB' ne sont pas parallèles.

Alors elles se coupent en un point, disons O.

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$$

On considère alors le point M de OC tel que

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OC}}$$

Par la réciproque du théorème de Thalès, AC et $A'M$ sont parallèles, et BC et $B'M$ sont parallèles.

M est donc à la fois sur $B'C'$ et sur $A'C'$, et donc $M = C'$. On en déduit le résultat demandé.

Notez que là aussi on peut raisonner via des homothéties.

•Second cas : AA' et BB' sont parallèles.

Alors $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, et on construit M tel que $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AA'}$; on a alors magiquement $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BB'}$, et donc $A'M$ est parallèle à AC et $B'M$ est parallèle à BC ; donc $M = C'$.

Il y a une réciproque au théorème de Desargues, que nous allons maintenant voir. Un point très sympathique est le besoin de passer par la géométrie projective.

THÉORÈME 0.24 **Théorème de Desargues**

On se donne ABC et $A'B'C'$ deux triangles d'un plan projectif. On note a, b et c les points d'intersection respectifs de BC et $B'C'$, AC et $A'C'$, AB et $A'B'$. Alors a, b et c sont alignés si et seulement si AA', BB' et CC' sont concourantes.

⊡ **En géométrie projective** Notez bien qu'il s'agit d'une généralisation du théorème précédent ! Deux droites parallèles en géométrie affine se croisent à l'infini dans leur complété projectif.

Démonstration

Supposons tout d'abord a, b et c alignés. Ils déterminent donc une droite. On peut supposer que cette droite est la droite à l'infini, puisque, comme on l'a déjà dit, n'importe quelle droite (ou hyperplan dans le cas général) peut être considérée comme droite (ou, donc, hyperplan dans le cas général) à l'infini.

On peut alors appliquer le théorème 0.23.

Il nous reste maintenant à montrer la réciproque.

Pour cela on va utiliser la dualité. En fait, il n'y a tout simplement rien à faire, car l'énoncé dual du théorème de Desargues, dans le sens où on l'a montré, est précisément sa réciproque.

1.14.4 $O_2(\mathbb{R})$, $O_3(\mathbb{R})$, les polygones réguliers, les polyèdres réguliers

$O_2(\mathbb{R})$ et $O_3(\mathbb{R})$ sont des notations classiques pour $O(\mathbb{R}^2)$ et $O(\mathbb{R}^3)$ respectivement. $O_k^+(\mathbb{R})$, dit aussi $SO_k(\mathbb{R})$, désigne l'ensemble des transformations orthogonales de déterminant positif de $\mathbb{R}^k$.

De manière plus générique, $O(E)$ désigne l'ensemble des matrices orthogonales de l'espace euclidien E ; $SO(E)$ désigne l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant positif de l'espace euclidien E. Ces notions dépendent donc du produit scalaire considéré ; implicitement, dans $O(\mathbb{R}^k) = O_k(\mathbb{R})$ (groupe orthogonal) ou $SO(\mathbb{R}^k) = O_k^+(\mathbb{R})$ (groupe spécial orthogonal), on considère le produit scalaire usuel.

Dimension 2

⊡ **Définition de la notion d'angle** On suppose $\mathbb{R}^2$ orienté (par exemple par l'orientation usuelle, qui fait de $((1,0),(0,1))$ une base orthonormée directe.

Définition 0.27 **Angle**

L'**angle orienté** entre deux vecteurs unitaires u et v de $\mathbb{R}^2$ (pris dans cet ordre) est par définition l'unique rotation de $\mathbb{R}^2$ par laquelle l'image de u est v.

L'**angle orienté** entre deux vecteurs non nuls quelconques u et v de $\mathbb{R}^2$ (pris dans cet ordre) est par définition l'angle orienté entre $\frac{1}{\|u\|}u$ et $\frac{1}{\|v\|}v$.

On appelle **angle nul** l'angle entre u et u pour u vecteur non nul quelconque (la notion ne dépend pas de u).

On appelle **angle plat** l'angle entre u et $-u$ pour u vecteur non nul quelconque.

On appelle **angle orienté de deux demi-droites** $\mathbb{R}^+u$ et $\mathbb{R}^+v$ l'angle orienté entre u et v.

Pour tous ces angles, l'angle non orienté correspondant est la paire $\{r, r^{-1}\}$ avec r l'angle orienté correspondant.

L'angle orienté de deux droites $\mathbb{R}u$ et $\mathbb{R}v$ est la paire des angles entre $\mathbb{R}^+u$ et $\mathbb{R}^+v$ et entre $\mathbb{R}^+u$ et $\mathbb{R}^-v$.

L'angle non-orienté correspondant est l'ensemble à 4 éléments (au plus) constitué des angles orientés entre $\mathbb{R}^+u$ et $\mathbb{R}^+v$, entre $\mathbb{R}^+u$ et $\mathbb{R}^-v$, et leurs inverses.

Étant donnée une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$ et un angle orienté r entre demi-droites ou entre vecteurs, on appelle **mesure de cet angle** l'unique $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que la matrice de r dans cette base soit

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Notons que la valeur de θ est indépendante du choix de la base orthonormée directe.

On appelle **mesure principale d'un angle** la mesure de cet angle comprise dans $]-\pi,\pi]$. On notera $\widehat{X,Y}$ l'angle orienté entre X et Y, quelle que soit la nature de X et Y.

Notons que ces définitions restent valables en remplaçant $\mathbb{R}^2$ par tout plan euclidien orienté.

Proposition 0.25

$$\widehat{b,a} = -\widehat{a,b}$$

$$\widehat{a,b} - \widehat{c,d} = \widehat{a,c} - \widehat{b,d}$$

$$\widehat{a,b} + \widehat{b,c} = \widehat{a,c}$$

Proposition 0.26

Tout sous-groupe fini de $O_2^+(\mathbb{R})$ s'identifie à un sous-groupe fini de $(\mathbb{U}, \times)$ [5].

Un tel sous-groupe est donc de la forme $\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} ; k \in [\![0, n-1]\!]\}$, et est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, avec n l'ordre du groupe. Il est ainsi monogène et cyclique.

Tout sous-groupe fini de $O_2(\mathbb{R})$ s'identifie à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ou à $D_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, groupe diédral d'ordre $2n$.

⊡ **Sous-groupes finis de $O_2(\mathbb{R})$**

Démonstration *Soit G un sous-groupe fini de $O_2^+(\mathbb{R})$. Il est engendré par un nombre fini de rotations (puisqu'il n'y a que des rotations dans $O_2^+(\mathbb{R})$). Donc il est engendré par des rotations d'ordre fini, d'angle $e^{\frac{2\pi}{n}}$. En posant m le ppcm des n en question, on constate que G est engendré par la rotation d'angle $e^{\frac{2\pi}{n}}$.*

On aurait aussi pu noter que $O_2^+(\mathbb{R})$ est isomorphe à $(\mathbb{U}, \times)$ (on associe la rotation d'angle θ au complexe $e^{i\theta}$.

Considérons maintenant G un sous-groupe fini de $O_2(\mathbb{R})$ et montrons qu'il est de l'une des deux formes annoncées. S'il est inclus dans $O_2^+(\mathbb{R})$ c'est terminé. En cas contraire, soit s appartenant à $G \cap O_2^-(\mathbb{R})$. s est une symétrie. L'intersection H de G et de $O_2^+(\mathbb{R})$ est un sous-groupe fini de $O_2^+(\mathbb{R})$; il est donc engendré par la rotation r d'angle $2\pi/n$ pour un certain n. Le groupe G est alors engendré par r et s ; $G = H \cup sH = \{Id, s\} \times H$ (au sens du produit ensembliste et non du produit direct). H est distingué, $\{Id, s\} \cap H = \{Id\}$: donc $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = D_n$.

Définition 0.28 **droite de Simson**

On appelle polygone régulier de $\mathbb{R}^2$ l'orbite d'un vecteur non nul sous l'action d'un sous-groupe fini de $O_2^+(\mathbb{R})$.

⊡ **Polygones réguliers** On consultera le §**??**, page **??** pour constater que le groupe diédral D_n est isomorphe au groupe des isométries d'un polygone régulier.

On pourra consulter le livre [3] pour la constructibilité des polygones réguliers ; la caractérisation des n tels que « le polygone régulier à n côtés est constructible » est très surprenante, et fait intervenir les nombres de Fermat : un tel polygone est constructible si n s'exprime comme le produit d'une puissance de 2 par un produit de nombres premiers de Fermat distincts [6]. Par exemple, le plus petit polygone régulier non constructible est l'heptagone.

6. Un nombre premier de Fermat est un nombre premier de la forme $2^{2^n} + 1$. Les seuls nombres premiers de Fermat connus sont 3, 5, 17, 257, 65537.

Théorème 0.27 **Sous-groupes finis de $O_3^+(\mathbb{R})$**

Les sous-groupes finis de $O_3^+(\mathbb{R})$ sont de l'une des 5 formes suivantes :
•Groupes constitués exclusivement de rotations, isomorphes à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
•Groupes isomorphes aux groupes diédraux (ordre pair)
Toutes les isométries des groupes d'un de ces deux premiers types ont la particularité de laisser stable une même droite D, i.e. ce sont des isométries agissant dans le plan $D^\perp$.
•Groupe des isométries positives laissant invariant un tétraèdre régulier (ordre 12)
•Groupe des isométries positives du cube = groupe des isométries positives de l'octaèdre (ordre 24)
•Groupe des isométries positives de l'icosaèdre (ordre 60)
Il existe des exemples pour chacun de ces cas.

Dimension 3 : Sous-groupes finis de $O_3^+(\mathbb{R})$

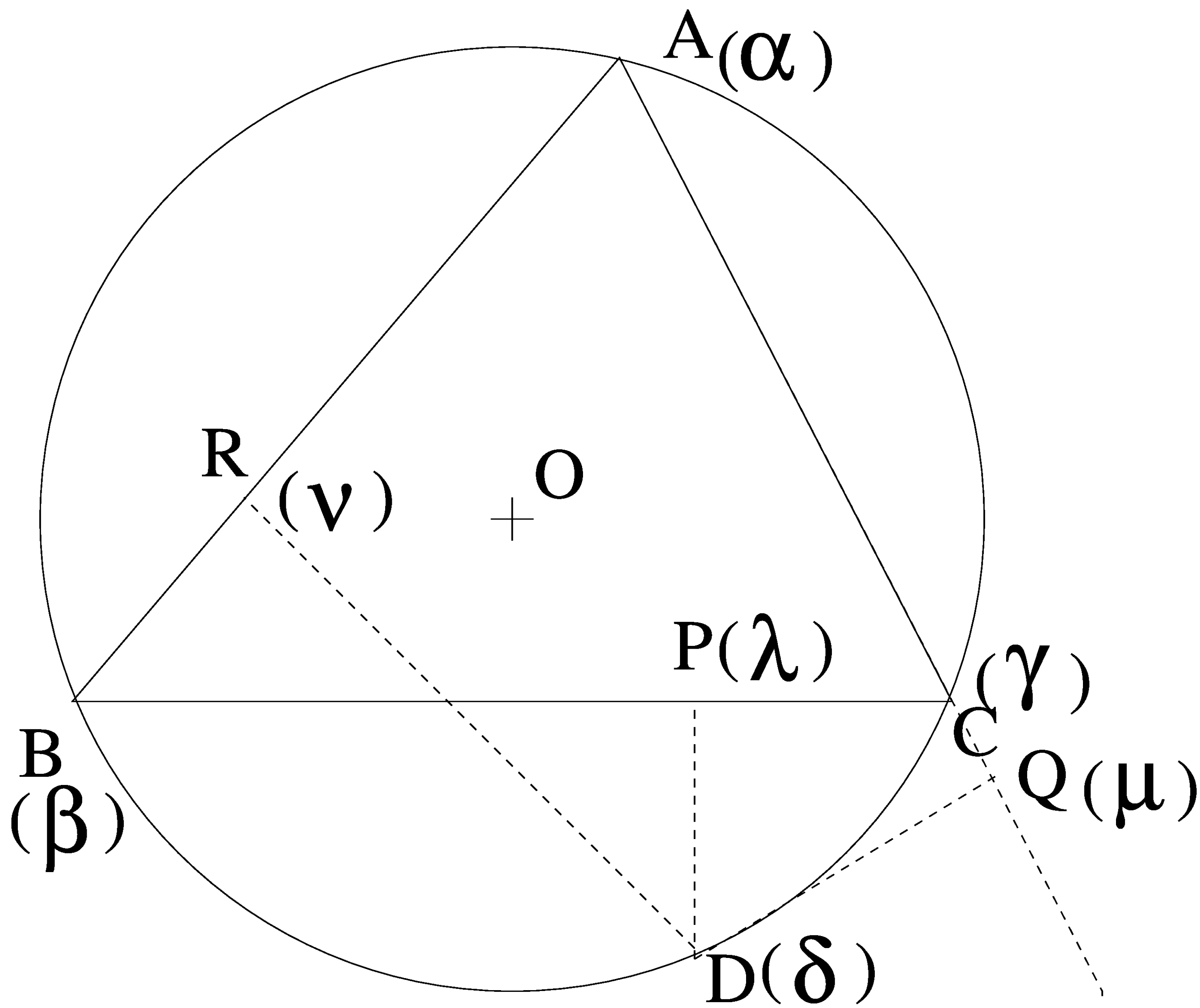
Démonstration *La démonstration de ce théorème serait bien trop longue pour la marge de ce livre. On pourra se référer au livre [3].*

⊡ **Polyèdres réguliers** On n'étudiera pas ici l'existence des 5 polyèdres réguliers et les relations de dualité. Le lecteur intéressé pourra se référer à [4] ; la preuve qui y est donnée est donnée de manière intuitive, car le formalisme nécessaire pour manier de tels objets est difficile, et il est sans doute préférable de se limiter à des notions intuitives.

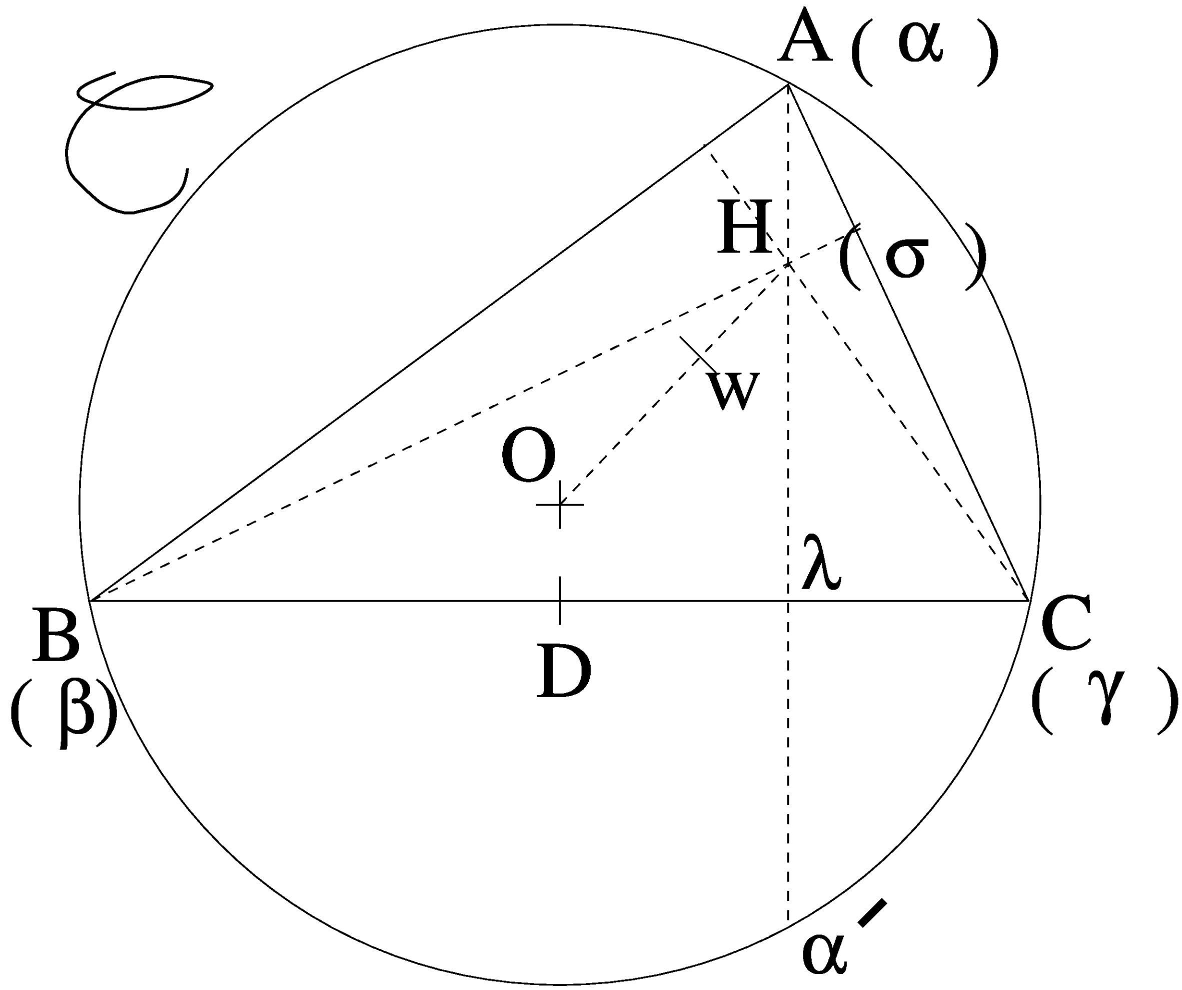
Les 5 polyèdres réguliers sont le tétraèdre (4 faces triangulaires), le cube (6 faces carrées), l'octaèdre (8 faces triangulaires), l'icosaèdre (20 faces triangulaires), le dodécaèdre (12 faces pentagonales).

1.14.5 La droite de Simson et quelques suites

La droite de Simson, selon la rumeur, ne devrait en fait rien à Simson mais plutôt à Wallace, mais tous les auteurs ne sont pas de cet avis. On parlera ensuite du cercle dit « cercle des neufs points ». Une autre étude classique est la droite de Steiner, dont nous ne parlerons pas ici. La version que nous donnons de ce théorème est une synthèse d'une partie du beau livre de Hahn, « Complex numbers and geometry ». On peut trouver dans la littérature l'enveloppe des droites de Simson (quand D bouge).



A(α)
R
(ν)
O
P(λ)
(γ)
C
B
(β)
Q(μ)
D(δ)



THÉORÈME 0.28
Soit A, B, C un triangle, D un point (figure **??**, gauche). Soient P, Q et R les projections orthogonales de D sur (BC), (CA) et (AB). Alors P,Q et R sont colinéaires $\iff$ D appartient au cercle circonscrit à ABC.

Démonstration *On considère le triangle ABC inscrit dans un cercle de centre 0 et de rayon 1 (sans perte de généralité). On note α, β, γ, δ, λ, μ et ν les affixes respectives de A,B,C,D,P,Q,R.*

Une équation de (BC) est donnée par le calcul suivant :

$$z \in (BC) \iff \frac{z-\beta}{\gamma-\beta} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{z-\beta}{\gamma-\beta} = \frac{\overline{z}-\overline{\beta}}{\overline{\gamma}-\overline{\beta}}$$

c'est-à-dire[7] $z+\gamma.\beta.\overline{z}=\beta+\overline{\gamma}$

Une équation de (PD) *est :*

$$\begin{aligned} z\in(PD) &\iff \frac{z-\delta}{\gamma-\beta}\in i\mathbb{R}\\ &\iff \frac{z-\delta}{\gamma-\beta}=-\frac{\overline{z}-\overline{\delta}}{\overline{\gamma}-\overline{\beta}}\end{aligned}$$

Donc l'intersection de ces deux droites doit vérifier :

$$z-\gamma.\beta.\overline{z}=\delta-\gamma.\beta.\overline{\delta}$$

On en déduit que $\lambda=\frac{1}{2}(\beta+\gamma+\delta-\beta.\gamma.\overline{\delta})$. *De même :*

$$\mu=\frac{1}{2}(\alpha+\gamma+\delta-\alpha.\gamma.\overline{\delta}),\ \nu=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\delta-\alpha.\beta.\overline{\delta})$$

$$\begin{aligned} P,Q,R \text{ colinéaires} &\iff & \frac{\lambda-\nu}{\mu-\nu}\in\mathbb{R},\\ &\iff & [\gamma,\frac{\delta}{|\delta|^2},\beta,\alpha]\in\mathbb{R}\\ &\iff & \alpha,\beta,\gamma,\frac{\delta}{|\delta|^2} \text{ cocycliques ou alignés}\\ &\iff & |\delta|=1\end{aligned}$$

Ce qui est précisément le résultat souhaité.

On suppose maintenant $|\delta|=1$.
λ vérifie $z=\frac{1}{2}(\beta+\gamma+\delta-\frac{\beta.\gamma}{\delta})$, soit :

$$\begin{aligned}\sigma_1 = &\quad \alpha+\beta+\gamma\\ \sigma_2 = &\quad \alpha.\beta+\alpha.\gamma+\beta.\gamma\sigma_3 = \quad \alpha.\beta.\gamma\end{aligned}$$

Il s'agit des trois polynômes symétriques élémentaires en α, β, γ. Notons que $\overline{\sigma}_1=\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}$.

$z=\frac{1}{2}(\sigma_1+\delta-\alpha-\frac{\sigma_3}{\delta.\alpha})$ et $\overline{z}=\frac{1}{2}(\sigma_2/\sigma_3+1/\delta-1/\alpha-\frac{\delta.\alpha}{\sigma_3})$

En éliminant α :

$$\delta.z-\sigma_3.\overline{z}=\frac{1}{2}(\delta\sigma_1+\delta^2-\sigma_2-\sigma_3/\delta)$$

Cette expression, étant symétrique en α, β, γ, est vérifiée aussi pour μ et ν. C'est l'équation d'un sous-espace affine, qui est :

- non vide
- non réduit à un point car P,Q,R ne sont jamais confondus.
- non égal au plan car σ_3 est non nul

Définition 0.29
Cette équation est donc l'équation d'une droite, appelée **droite de Simson**.

7. En constatant que $\frac{\alpha-\beta}{\overline{\alpha}-\overline{\beta}}=-\beta\gamma$ et $\frac{\beta\overline{\gamma}-\overline{\beta}\gamma}{\overline{\gamma}-\overline{\beta}}=\beta+\gamma$.

THÉORÈME 0.29
Soient L, M, N trois points sur le cercle circonscrit à ABC. Alors les trois droites de Simson correspondantes sont concourantes si et seulement si $\widehat{AL} + \widehat{BM} + \widehat{CN}$ est nul modulo 2π.

Démonstration

Soient l, m, n les affixes respectives de L, M, N.

$$l.z - \sigma_3.\overline{z} = \frac{1}{2}(l^2 + \sigma_1.l - \sigma_3 - \sigma_3/l)$$
$$m.z - \sigma_3.\overline{z} = \frac{1}{2}(m^2 + \sigma_1.m - \sigma_3 - \sigma_3/m)$$
$$n.z - \sigma_3.\overline{z} = \frac{1}{2}(n^2 + \sigma_1.n - \sigma_3 - \sigma_3/n)$$

Les deux premières se coupent en $z = \frac{1}{2}(l + m + \sigma_1 + \sigma_3/(l.m))$.

Les deux dernières se coupent en $z = \frac{1}{2}(m + n + \sigma_1 + \sigma_3/(m.n))$.

La condition nécessaire et suffisante est donc $l - n + \sigma_3.(n - l)/(l.m.n) = 0$, c'est-à-dire $\sigma_3 = m.l.n$ ou encore $\alpha.\beta.\gamma = l.m.n$,
d'où le résultat par passage aux arguments.

1.14.6 Le cercle des neuf points, et une suite par Coolidge

Cette partie est, elle aussi, fortement inspirée du livre de Hahn « Complex Numbers and Geometry ».

THÉORÈME 0.30
Soient (ABC) un triangle, O le centre du cercle circonscrit, G le barycentre de A, B et C, et H l'intersection des hauteurs (figure **??**, droite).

Alors :

•(O, G, H) sont alignés.

•Les pieds des hauteurs, les milieux des côtés et les milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets A, B et C sont tous sur un même cercle.

Démonstration *On choisit O pour origine du plan complexe.*

On note α, β, γ les affixes respectives de A, B, C. On note $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit, dont on suppose encore le rayon égal à 1, sans perte de généralité.

Soit H le point d'affixe $\theta = \alpha + \beta + \gamma$. Comme $\frac{\sigma-\alpha}{2} = \frac{\beta+\gamma}{2}$, on a $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OD}$, où D est le milieu de BC. En particulier, comme OA' est la médiatrice de $[BC]$, on a (AH) et (BC) orthogonales.

On peut raisonner de même pour obtenir $BH \perp AC$ et $CH \perp AB$; on retrouve ainsi le fait que les hauteurs sont concourantes en H. Comme G a pour affixe $\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$, les points O, G et H sont alignés (et $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$).

Soit W d'affixe $\sigma/2$; W est le milieu de $[OH]$.

$WD = |\frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\sigma}{2}| = |\alpha|/2 = \frac{1}{2}$

De même $WE = WF = \frac{1}{2}$ avec E et F les milieux respectifs de $[CA]$ et $[AB]$.

La distance de W au milieu de AH est elle aussi $\frac{1}{2}$, et de même pour les autres.

On note Λ l'affixe du pied de la hauteur issue de A.

Pour situer Λ on va d'abord s'intéresser à α', la seconde intersection de $\alpha\Lambda$ avec $\mathcal{C}$. On va montrer que $B\alpha'\sigma$ est isocèle.

$\overrightarrow{A\alpha'}\perp\overrightarrow{BC}$ donne $\frac{\alpha'-\alpha}{\gamma-\beta}\in i.\mathbb{R}$.

<u>Lemme :</u> On a $\alpha' = -\frac{\beta\gamma}{\alpha}$.

begindivdemonstrationbegintext endtext Comme le quotient $\frac{\beta\gamma}{\alpha\alpha'}$ est invariant par rotation, on peut supposer que $\overrightarrow{A\alpha'}$ est vertical et $\overrightarrow{BC}$ horizontal, de sorte que $\alpha\alpha' = 1$ et $\beta\gamma = -1$, si bien que ce quotient vaut -1 et $\alpha' = -\frac{\beta\gamma}{\alpha}$ dans tous les cas.

On obtient donc par le lemme ci-dessus $\alpha' = -\frac{\beta\gamma}{\alpha}$. On montre ensuite facilement que $|B-\alpha'| = |B-\sigma|$, donc le triangle $B\alpha'\sigma$ est isocèle. Le pied λ de la hauteur issue de A est en fait aussi le milieu de $[\alpha'\sigma]$.

On en déduit alors que $|\Lambda - \sigma/2| = 1/2$. On ferait de même pour les pieds des autres hauteurs. Finalement $\sigma/2$ est le centre d'un cercle de rayon $1/2$ comportant les pieds des trois hauteurs, les milieux des trois côtés, et les milieux des segments joignants l'orthocentre aux sommets A,B et C sont tous sur un même cercle. enddivdemonstration

Enfin, voici le résultat dû à Coolidge :

•Soient z_1,...,z_4 sur le cercle unité. Le centre du cercle d'Euler de z_2, z_3, z_4 est $\tau_1 = \frac{1}{2}(z_2+z_3+z_4)$; τ_2, τ_3, τ_4 sont définis de manière analogue. On définit en outre $\tau = \frac{1}{4}(z_1+z_2+z_3+z_4)$; alors pour tout i, τ_i est sur le cercle de centre τ et de rayon $\frac{1}{2}$; ce cercle est appelé cercle d'Euler du quadrilatère z_1,z_2,z_3,z_4.

•On peut faire la même chose avec 5 points ; on définit 5 cercles d'Euler de 5 quadrilatères, et un cercle d'Euler pour le pentagone.

•On peut procéder de même avec un polygone quelconque.

Pour plus de précisions, on pourra consulter le livre de Hahn cité ci-dessus.

Références

[1] Wikipédia, *L'encyclopédie Libre, Wikipédia*, Wikipédia Fondation.

[2] B. Chazelle, *The Discrepancy Method*, Cambridge University Press, 2000.

[3] W. Giorgi, *Thèmes mathématiques pour l'agrégation*, Masson, 1998.

[4] F. Combes *Algèbre et géométrie*, Bréal, 1998.