Fourier

Christophe Antonini[1], Olivier Teytaud[2], Pierre Borgnat[3], Annie Chateau[4], and Edouard Lebeau[5]

[1]Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes
[2]Chargé de rechercher INRIA, Université d'Orsay, Orsay
[3]Chargé de recherche CNRS, ENS Lyon, Lyon
[4]Maitre de conférence, Université Montpellier-2, Montpellier
[5]Enseignant en CPGE, Lycée Henri Poincaré, Nancy

9 juillet 2022

Séries de Fourier et applications.

1 Fourier

Il est nécessaire pour cette partie d'avoir lu les parties **??** et **??**. On verra tout d'abord quelques éléments sur les séries trigonométriques (1.1). On définira alors la série de Fourier d'une fonction périodique (1.2). On étudiera alors la transformée de Fourier (1.3), et ses nombreuses applications (1.4).

1.1 Séries trigonométriques

DÉFINITION 0.1 **T-périodique**
Une fonction f est dite **T-périodique** si pour tout x $f(x+T)=f(x)$.

Pour p fini on note $\mathfrak{L}^p$ l'espace $L^p_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$ [1] pour la mesure de Lebesgue, mais avec une norme divisée par 2π, c'est-à-dire que $\|f\| = (\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p.dx)^{\frac{1}{p}}$.
On note $\mathfrak{L}^\infty$ l'espace $L^\infty_{\mathbb{C}}([-\pi,\pi])$ pour la mesure de Lebesgue.

On appelle **polynôme trigonométrique** une application de la forme $t \mapsto a_0 + \sum_{i=1}^{N} a_i.\cos(i.t) + b_i.\sin(i.t)$, pour $N \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{C}$, $b_i \in \mathbb{C}$.

Le produit scalaire hermitien usuel sur $\mathfrak{L}^2$ est l'application $(f,g) \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}.g(t).dt$. Il s'agit bien d'un produit scalaire hermitien.

On note u_n l'application $t \mapsto e^{int}$, pour $n \in \mathbb{Z}$. Nous verrons plus loin qu'il s'agit d'une base hilbertienne de $\mathfrak{L}^2$.

Remarque 0.1 Remarques •On identifiera par la suite (sans préavis !) une fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ à une fonction périodique de période 2π. À part dans les cas où la continuité est importante, on se préoccupera peu du problème de définition en π, puisque l'on travaillera généralement sur des propriétés vraies presque partout pour la mesure de Lebesgue.

•Pour p fini, il faut changer de norme (division par 2π pour la mesure de Lebesgue) mais ce n'est pas le cas pour p infini. De plus il existe d'autres conventions qui changent la mesure à utiliser. Par exemple, si l'on raisonne sur $[0, 1]$ au lieu de $[-\pi, \pi]$, la norme ne change pas et les fonctions de base sont alors les $t \mapsto e^{i2\pi nt}$.

•On peut réécrire un polynôme trigonométrique sous la forme $t \mapsto \sum_{i=-N}^{N} c_n.e^{int}$, avec $N \in$ et $c_i \in$ (et réciproquement, une telle fonction est toujours un polynôme trigonométrique).

•Un polynôme trigonométrique est 2π-périodique.

Théorème 0.1

La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathfrak{L}^2$.

Démonstration

•Il s'agit d'une famille orthonormale à l'évidence.

•On sait qu'une famille orthonormale est une base hilbertienne si elle engendre un espace dense (cf théorème **??***).*

•Il suffit donc pour conclure d'appliquer la densité des fonctions C^∞ dans L^p (th. **??***) et de montrer que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans l'ensemble des fonctions continues de $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{C}$ (on utilise la densité de $C^0([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ dans $\mathcal{L}^2$). Pour cela, on procède comme suit :*

– on considère f une fonction continue de $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{C}$

– on définit $P_n(t) = \frac{((1+\cos(t))/2)^n}{\int_{-\pi}^{\pi}((1+\cos(t))/2)^n.dt}$

On constate (par linéarisation du numérateur) que P_n est un polynôme trigonométrique positif, d'intégrale 1, convergeant uniformément vers 0 sur $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, +\pi]$ pour tout $\delta \in]0, \pi[$. Intuitivement, P_n tend vers une fonction comportant une pointe en 0 et nulle partout ailleurs.

– on définit $f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_n(x-t).dx$. En remarquant que le translaté d'un polynôme trigonométrique est un polynôme trigonométrique, on montre que f_n est un polynôme trigonométrique.

– on montre alors que la norme infinie de $f_n - f$ tend vers 0, et donc la norme 2 aussi puisque $[-\pi, \pi]$ est de mesure finie.

1.2 Séries de Fourier d'une fonction périodique

Pour étudier une fonction périodique, on se ramène au cas d'une période 2π, et on la considère définie sur $[-\pi, \pi]$.

DÉFINITION 0.2 **coefficients de Fourier de** f
Soit f dans $\mathfrak{L}^1$. On définit les **coefficients de Fourier de** f pour $n \in \mathbb{Z}$ par

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t).dt$$

On appelle **noyau de Dirichlet d'ordre** n et on note D_n l'application $x \mapsto \sum_{i=-n}^{n} u_i(x)$.
On appelle **noyau de Féjer d'ordre** n et on note K_n l'application

$$x \mapsto \frac{\sum_{i=0}^{n-1} D_i}{n}$$

On note $s_n(f)$ et on appelle **somme de Fourier d'ordre** n la somme $\sum_{i=-n}^{n} \hat{f}(i) u_i$.
On note $\sigma_n(f)$ et on appelle **somme de Féjer d'ordre** n la somme $(\sum_{i=0}^{n-1} s_i)/n$.
On appelle **série de Fourier** associée à f la série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{int}$$

Intuition $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n = 1$ si $n = 0$ et 0 sinon, ce qui implique que pour tout $n \geq 0$ on a $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n = 1$ et pour tout $n \geq 1$ on a $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n = 1$.

Intuition On a $s_n(f) = \frac{1}{2\pi} D_n * f$ et $\sigma_n(f) = \frac{1}{2\pi} K_n * f$ (où $*$ est le produit de convolution sur $[-\pi, pi]$, par définition $(g * f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) f(x-t) dt$; voir le chapitre **??**) ce qui justifie le terme de noyau.

⚠ *Attention 0.1* Bien noter le signe moins dans l'exponentielle de la formule de définition des coefficients de Fourier.

On remarque que si $f \in \mathfrak{L}^2$, alors $f \in \mathfrak{L}^1$, et $\hat{f}(n) = (u_n, f)$.

PROPOSITION 0.2
On a isomorphisme isométrique entre $\mathfrak{L}^2$ et $l^2(\mathbb{Z})$, donné par $f \mapsto \hat{f}$.

Démonstration *C'est simplement une reformulation du théorème* **??**.

PROPOSITION 0.3

Toute fonction f dans $\mathfrak{L}^2$ est somme de sa série de Fourier pour $\mathfrak{L}^2$ (c'est-à-dire que la série de Fourier de f tend vers f pour la norme 2 et ce pour toute f dans $\mathfrak{L}^2$).

Démonstration *Le théorème 0.1 nous garantit que la série de Fourier est bien la projection sur une base hilbertienne. Le résultat est alors immédiat par définition des bases hilbertiennes (cf définition* **??***).*

⚠ *Attention 0.2 Il n'y a pas convergence simple de la série de Fourier vers f, même si f est continue !*

Un problème majeur va être de montrer des résultats similaires dans $\mathcal{L}^1$.

PROPOSITION 0.4

$$D_n(x) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}, \quad K_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2$$

Démonstration *Si x n'est pas multiple de 2π, alors*

$$\begin{aligned} D_n(x) &= u_{-n}(x)\sum_{k=0}^{2n} u_k(x) \\ &= u_{-n}(x)\frac{(e^{ix})^{2n+1}-1}{e^{ix}-1} \\ &= u_{-n}(x)\frac{e^{ix(n+1/2)}}{e^{ix/2}}\frac{e^{ix(n+1/2)}-e^{-ix(n+1/2)}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}} \\ &= \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)} \end{aligned}$$

D'où le résultat sur D_n (si x est multiple de 2π, $D_n(x) = 2n+1$, qui est l'unique prolongement par continuité de $\frac{\sin(n+\frac{1}{2}x)}{\sin(x/2)}$).

Toujours pour x non multiple de 2π,

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin((k+1/2)x)}{\sin(x/2)} \\ &= \frac{1}{n\sin(x/2)} Im\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1/2)x}\right) \\ &= \frac{1}{n\sin(x/2)} Im\left(e^{ix/2}\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}\right) = \frac{\sin(nx/2)^2}{n\sin(x/2)^2} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Deux résultats distincts, prouvés de manières similaires :

THÉORÈME 0.5 **Théorème de Fejer**

•Soit f périodique continue de période 2π. Alors pour tout n $\|\sigma_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \to 0$ pour $n \to \infty$.

•Soit $f \in \mathfrak{L}^p$, avec $p \in [1, \infty[^2$. Alors pour tout n $\|\sigma_n(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0$ pour $n \to \infty$.

Démonstration *Cette preuve est détaillée dans le livre [[]p81]ZQ. Elle utilise à la fois l'inégalité de Hölder et le théorème de Fubini, et le dernier résultat donné sur le noyau de Féjer.*

Un autre résultat, de convergence ponctuelle ce coup-ci :

THÉORÈME 0.6 **Théorème de Dirichlet**

Si f est L^1 et si f admet une *pseudo-dérivée* à droite et à gauche en x, alors

$$\sigma_n(f)(x) \to \frac{1}{2}(lim_{t\to x, t<x} f(t) + lim_{t\to x, t>x} f(t))$$

⚠ *Attention 0.3* Il ne s'agit pas nécessairement de dérivées à gauche ou à droite, on peut se contenter d'avoir f dans L^1, et admettant en x une limite à gauche et à droite $f_-(x)$ et $f_+(x)$; alors les « pseudo-dérivées » à gauche et à droite sont

$$f'_g(x) = lim_{t\to x, t<x} \frac{f(t) - f_-(x)}{t - x}$$

$$f'_d(x) = lim_{t\to x, t>x} \frac{f(t) - f_+(x)}{t - x}$$

Démonstration *On renvoie à [1] pour une preuve très claire.*

1.3 Transformation de Fourier

DÉFINITION 0.3 **transformée de Fourier**
On se donne f dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, et on note pour x dans $\mathbb{R}$

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixt}.dt$$

$\hat{f}$ est appelée **transformée de Fourier** de f (plus précisément il s'agit de la **transformée de Fourier** L^1 de f).

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des $x \in \mathbb{C}$ tels que $|x| = 1$.

Intuition Si f est dans L^1, alors $\hat{f}$ est continue et tend vers 0 en $\pm\infty$.

PROPOSITION 0.7 **Quelques propriétés de la transformée de Fourier**

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.
•Avec $g : x \mapsto f(x)e^{i\lambda x}$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(t) = \hat{f}(t - \lambda)$.
•Avec $g : x \mapsto f(x - \lambda)$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(t) = \hat{f}(t)e^{-i\lambda t}$.
•Si g est L^1 et si $h = f * g$, alors $\hat{h}(t) = \hat{f}(t)\hat{g}(t)$.

Démonstration *Les deux premiers • sont clairs. Le troisième découle immédiatement du théorème de Fubini* **??**.

Les deux théorèmes suivants, fondamentaux, ne seront pas prouvés ici. Ils sont ardus, et prouvés rigoureusement dans [2].

Théorème 0.8 **Théorème d'inversion**

Si f et $\hat{f}$ appartiennent tous deux à L^1, alors

$$g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{ixt} dt$$

est continue, tend vers 0 en $+\infty$ ou $-\infty$ et est égale à f presque partout.

Théorème 0.9 **Théorème de Plancherel**

La transformation de Fourier s'étend en une **transformation de Fourier** L^2, définie comme l'unique application $f \mapsto \hat{f}$ de L^2 dans L^2 telle que :

•elle coïncide avec la transformée de Fourier L^1 sur $L^1 \cap L^2$

•c'est une isométrie de L^2 dans L^2

Elle vérifie en outre certaines propriétés intéressantes :

•c'est un isomorphisme d'espaces de Hilbert entre L^2 et L^2

•elle vérifie le théorème d'inversion L^2 :

$$lim_{M \to \infty} \|f_M - \hat{f}\|_2 = 0$$

$$\text{avec } f_M(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M}^{M} f(x) e^{-ixt} dx$$

$$\text{et } lim_{M \to \infty} \|\hat{f}_M - f\|_2 = 0$$

$$\text{avec } \hat{f}_M(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M}^{M} \hat{f}(t) e^{ixt} dt$$

on peut aussi écrire que l'application de $L^1 \cap L^2$ dans $L^1 \cap L^2$ qui à f associe $\tilde{f}$ avec $\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixt} dt$ s'étend en une isométrie de L^2 dans L^2, et $f \mapsto \tilde{f}$ est l'inverse de $f \mapsto \hat{f}$ au sens où pour toute $f \in L^2$, $\hat{\tilde{f}} = \tilde{\hat{f}} = f$ presque partout.

1.4 Applications des séries de Fourier

Les applications des séries de Fourier sont innombrables. Outre la résolution d'équations de la chaleur (cf le livre de Zuily & Queffélec), et de nombreuses applications en traitement du signal (remplacer un signal par sa transformée de Fourier le rend beaucoup plus reconnaissable, et un ordinateur parvient ainsi beaucoup mieux à reconnaître un son après transformée de Fourier que sur les données brutes), on peut trouver des applications originales comme le calcul de la somme des $1/n^2$ développé ci-dessous. La décomposition en séries de Fourier est développée sur deux exemples en fin de partie.

1.4.1 Calcul de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Proposition 0.10

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$$

Démonstration

On applique simplement la formule de Parseval (théorème **??***) à la transformée de Fourier de l'application identité de* $[-\pi, \pi[$ *dans lui-même.*

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$*, définissons*

$$c_k = 2\pi \hat{f}(k)$$

$$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} x e^{ikx} dx$$

$$c_0 = 0 \text{ c'est-à-dire } \hat{f}(0) = 0.$$

$$\text{Soit } k \neq 0, \text{ alors } c_k = [\frac{xe^{ikx}}{ik}]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx = \frac{2\pi(-1)^k}{ik}$$

donc pour $k \neq 0$ $\hat{f}(k) = (-1)^k/(ik)$.

Par la formule de Parseval on a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 &= \sum_{k<0} 1/k^2 + \sum_{k>0} 1/k^2 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} 2/k^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \pi^2/3. \end{aligned}$$

Ainsi $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$.

Exemple Maple
$> Sum(1/k\hat{}\ 2, k = 1..infinity)$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ $> value(\%)$ $\frac{1}{6}\pi^2$

1.4.2 Exemple de développement en série de Fourier : fonction créneau, fonction identité par morceaux

Exemple Maple

$> \ fouriers := (f, n) - > (int(f(t) * \sin(n * t), t = -Pi..Pi));$

$$fourierc := (f,\, n) \to \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(n\,t)\, dt$$

$$fouriers := (f,\, n) \to \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(n\,t)\, dt$$

$> \ serie\_fourier := (f, n) - > sum(fouriers(f, k) * \sin(k * t), k = 1..n)$

Exemple Maple

$+sum(fourierc(f,k)*\cos(k*t),k=1..n)+fourierc(f,0)/2;$

$$serie\_fourier := (f,\, n) \to (\sum_{k=1}^{n} \mathrm{fouriers}(f,\, k)\sin(k\,t)) + (\sum_{k=1}^{n} \mathrm{fourierc}(f,\, k)\cos(k\,t))$$

$>\ p := array(0..5);$
$>\ for\ i\ from\ 1\ by\ 2\ to\ 9\ do$
$>\quad p[(i-1)/2] := serie\_fourier(Heaviside, i);$
$>\ od;$
$>\ p[5] := Heaviside(t);$
$> plot(p, t=-Pi..Pi, title=\text{"}Approximations\ d'une\ fonction\ creneau\ par\ series\ de\ Fourier\text{"});$
$>\ q := array(0..5);$
$>\ for\ i\ from\ 1\ by\ 2\ to\ 9\ do$
$>\quad q[(i-1)/2] := serie\_fourier(x->x, i);$
$>\ od;$
$>\ plot(q, t=-Pi..Pi, title=\text{"}Approximations\ d'une\ fonction\ lineaire\ par\ morceaux\ par\ series\ de\ Fourier\text{"});$

Il faut bien noter que les coefficients de Fourier étant calculés simplement en fonction du segment $[-\pi, \pi]$, on ne se préoccupe que de la valeur de la fonction sur ces valeurs, d'où la simple définition $x \mapsto x$ ou *Heaviside*, où on ne se préoccupe pas de périodiciser la fonction.

Références

[1] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses 1994.

[2] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson 1992.