Polynômes à plusieurs indéterminées

Christophe Antonini[1], Olivier Teytaud[2], Pierre Borgnat[3], Annie Chateau[4], and Edouard Lebeau[5]

[1]Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes
[2]Chargé de rechercher INRIA, Université d'Orsay, Orsay
[3]Chargé de recherche CNRS, ENS Lyon, Lyon
[4]Maitre de conférence, Université Montpellier-2, Montpellier
[5]Enseignant en CPGE, Lycée Henri Poincaré, Nancy

19 janvier 2022

Généralités sur les polynômes à plusieurs indéterminées et zoologie.

1 Polynômes à plusieurs indéterminées

Cette partie sera délibérément très peu détaillée ; beaucoup de démonstrations sont calquées sur le cas des polynômes à une indéterminée. On peut en première lecture se limiter à la partie **??**, ou l'on travaillera avec des polynômes à une seule indéterminée, et fournissant les méthodes permettant de s'attaquer à cette partie plus abstraite.

1.1 Généralités

Définition 0.1 **polynôme à n indéterminées à coefficients dans A**

Soit A un anneau commutatif unitaire.

On appelle **polynôme à n indéterminées à coefficients dans** A l'ensemble des applications presque nulles de $\mathbb{N}^n$ dans A. On note $A[X_1, \ldots, X_n]$ l'ensemble des polynômes à n indéterminées à coefficients dans A. Par la suite, on dira souvent simplement, pour gagner en concision, polynôme.

On dit que $P \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ est **de degré** d si d est le max des $|\nu|$ tels que P_ν est non nul (voir Définition **??** pour les rappels sur les opérations dans $\mathbb{N}^n$).

Si $i \in [[1, n]]$, on dit que P est de degré d en X_i si le sup des ν_i tels que $P_\nu \neq 0$ est d.

On note X_i l'élément de $A[X_1, \dots, X_n]$ nul partout sauf en $\nu = (\delta_{i,j})_{j \in [1,n]}$, avec $X_\nu = 1$.

Etant donnés P et Q deux polynômes, on note $R = P \times Q$ le **produit de** P **et** Q avec

$$R_\nu = \sum_{\alpha + \beta = \nu} P_\alpha Q_\beta$$

(pour les opérations dans N^n, voir Définition **??**).

On appelle **monôme** un polynôme dont un seul élément est non nul.

On appelle **dérivé formel** d'un polynôme P par D^ν pour $\nu \in \mathbb{N}^n$ le polynôme

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{(\nu + \alpha)!}{\alpha!} P_{\alpha + \nu}.$$

On note parfois $\frac{\delta}{\delta X_i}$ D^ν avec $\nu_j = (\delta_{i,j})_{j \in [1,n]}$.

Proposition 0.1

On identifie $A[X_1, \dots, X_n]$ à $A[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$.

On identifie $A[X_1, \dots, X_p][X_{p+1}, \dots, X_n]$ à $A[X_1, \dots, X_n]$.

$A[X_1, \dots, X_n]$ est intègre si et seulement si A est intègre.

$A[X_1, \dots, X_n]$ est muni naturellement d'une structure de A-module. Muni de la multiplication définie plus haut, il s'agit d'une A-algèbre.

L'ensemble des monômes unitaires est une base de $A[X_1, \dots, X_n]$.

Etant donnée B une A-algèbre associative commutative unitaire, $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ et $x_1, ..., x_n$ n éléments de B, on appelle **valeur de** P **en** $(x_1, \dots, x_n)$ l'élément de B $\sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} P_\nu x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_n^{\nu_n}$. On note cet élément $\tilde{P}(x_1, \dots, x_n)$. On constate ainsi qu'un polynôme P s'identifie naturellement à une application $\tilde{P}$ de B^n dans B. On note $A[x_1, \dots, x_n]$ l'ensemble des $\tilde{P}(x_1, \dots, x_n)$ pour $P \in A[x_1, \dots, x_n]$.

Si $(x_1, \dots, x_n)$ vérifie $\tilde{P}(x_1, \dots, x_n) = 0$, on dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est un zéro de P.

Etant donné $(x_1, \dots, x_n)$ n éléments de B, l'ensemble des polynômes P vérifiant $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ est un idéal de $A[X_1, \dots, X_n]$, engendré par les $(X_i - a_i)$ pour $i \in [1, n]$.

1.2 Si A est un corps $\mathbb{K}$

Proposition 0.2

Si $\mathbb{K}$ est un corps, $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel . **Formule de Taylor**, si $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle : soit $P \in \mathbb{K}[X]$, alors

$$P = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\nu!} (D^\nu P)(0) X^\nu.$$

1.3 Zoologie des polynômes à plusieurs indéterminées : les polynômes symétriques

Attention A est supposé ici anneau commutatif et unitaire.

DÉFINITION 0.2 **polynôme symétrique**

Soit $P \in A[X_1, \ldots, X_n]$. P est dit **polynôme symétrique** si et seulement si pour tout σ permutation de $[1, ..., n]$, $P(X_1, ..., X_n) = P(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, ..., X_{\sigma(n)})$.

On appelle **polynômes symétriques élémentaires** les polynômes de la forme

$$\Sigma_{k,n} = \sum_{1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k \leq n} X_{a_1} X_{a_2} ... X_{a_k} \text{ pour } 1 \leq k \leq n$$

On appelle **k-ième polynôme de Newton** le polynôme $N_k = \sum_{i=1}^{n} X_i^k$.

Les polynômes symétriques élémentaires sont de la forme suivante, dans le cas $n = 3$:

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,3} &= X_1 + X_2 + X_3 \\ \Sigma_{2,3} &= X_1X_2 + X_2X_3 + X_1X_3 \\ \Sigma_{3,3} &= X_1X_2X_3 \end{aligned}$$

Apllication On verra en section **??** une application des polynômes symétriques en géométrie et en section **??** une application aux polynômes à une indéterminée.

On ne donnera pas ici de preuve des résultats énoncés ; on pourra se référer à [1]. On a les propriétés suivantes :

•Les polynômes symétriques élémentaires sont symétriques (évident).

•Les polynômes de Newton sont symétriques (évident).

•Si Q est un polynôme à n indéterminées, alors $P = Q(\Sigma_{1,n}, \Sigma_{2,n}, ..., \Sigma_{n,n})$ est un polynôme symétrique (facile).

•Si $P \in A[X_1, ..., X_n]$ est symétrique, alors il existe un polynôme Q tel que $P = Q(\Sigma_{1,n}, \Sigma_{2,n}, ..., \Sigma_{n,n})$ (pas évident du tout, récurrence sur le nombre d'indéterminées et sur le degré du polynôme.

•**Relations de Newton** : Si $1 \leq k \leq n$ on a

$$N_k = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i N_{k-i} \Sigma_{i,n} + (-1)^k k \Sigma_{k,n}.$$

$$\text{Si } n \leq k, \text{ on a } N_k = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i N_{k-i} \Sigma_{i,n}.$$

Références

[1] P. Tauvel, *Mathématiques générales pour l'agrégation*, Masson, 1997.