

Polynômes à plusieurs indéterminées

Christophe Antonini¹, Olivier Teytaud², Pierre Borgnat³, Annie Chateau⁴, and
Edouard Lebeau⁵

¹Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes

²Chargé de recherche INRIA, Université d'Orsay, Orsay

³Chargé de recherche CNRS, ENS Lyon, Lyon

⁴Maitre de conférence, Université Montpellier-2, Montpellier

⁵Enseignant en CPGE, Lycée Henri Poincaré, Nancy

11 août 2023



Généralités sur les polynômes à plusieurs indéterminées et zoologie.

1 Polynômes à plusieurs indéterminées

Cette partie sera délibérément très peu détaillée ; beaucoup de démonstrations sont calquées sur le cas des polynômes à une indéterminée. On peut en première lecture se limiter à la partie ??, ou l'on travaillera avec des polynômes à une seule indéterminée, et fournissant les méthodes permettant de s'attaquer à cette partie plus abstraite.

1.1 Généralités

DÉFINITION 0.1 polynôme à n indéterminées à coefficients dans A

Soit A un anneau commutatif unitaire.

On appelle **polynôme à n indéterminées à coefficients dans A** l'ensemble des applications presque nulles de \mathbb{N}^n dans A . On note $A[X_1, \dots, X_n]$ l'ensemble des polynômes à n indéterminées à coefficients dans A . Par la suite, on dira souvent simplement, pour gagner en concision, polynôme.

On dit que $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ est **de degré d** si d est le max des $|\nu|$ tels que P_ν est non nul (voir Définition ?? pour les rappels sur les opérations dans \mathbb{N}^n).

Si $i \in [[1, n]]$, on dit que P est de degré d en X_i si le sup des ν_i tels que $P_\nu \neq 0$ est d .

On note X_i l'élément de $A[X_1, \dots, X_n]$ nul partout sauf en $\nu = (\delta_{i,j})_{j \in [1,n]}$, avec $X_\nu = 1$.
 Etant donnés P et Q deux polynômes, on note $R = P \times Q$ le **produit de P et Q** avec

$$R_\nu = \sum_{\alpha+\beta=\nu} P_\alpha Q_\beta$$

(pour les opérations dans N^n , voir Définition ??).

On appelle **monôme** un polynôme dont un seul élément est non nul.

On appelle **dérivé formel** d'un polynôme P par D^ν pour $\nu \in \mathbb{N}^n$ le polynôme

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{(\nu + \alpha)!}{\alpha!} P_{\alpha+\nu}.$$

On note parfois $\frac{\delta}{\delta X_i} D^\nu$ avec $\nu_j = (\delta_{i,j})_{j \in [1,n]}$.

PROPOSITION 0.1

On identifie $A[X_1, \dots, X_n]$ à $A[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$.

On identifie $A[X_1, \dots, X_p][X_{p+1}, \dots, X_n]$ à $A[X_1, \dots, X_n]$.

$A[X_1, \dots, X_n]$ est intègre si et seulement si A est intègre.

$A[X_1, \dots, X_n]$ est muni naturellement d'une structure de A -module. Muni de la multiplication définie plus haut, il s'agit d'une A -algèbre.

L'ensemble des monômes unitaires est une base de $A[X_1, \dots, X_n]$.

Etant donnée B une A -algèbre associative commutative unitaire, $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ et x_1, \dots, x_n n éléments de B , on appelle **valeur de P en (x_1, \dots, x_n)** l'élément de B $\sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} P_\nu x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_n^{\nu_n}$. On note cet élément $\tilde{P}(x_1, \dots, x_n)$. On constate ainsi qu'un polynôme P s'identifie naturellement à une application \tilde{P} de B^n dans B . On note $A[x_1, \dots, x_n]$ l'ensemble des $\tilde{P}(x_1, \dots, x_n)$ pour $P \in A[X_1, \dots, X_n]$.

Si (x_1, \dots, x_n) vérifie $\tilde{P}(x_1, \dots, x_n) = 0$, on dit que (x_1, \dots, x_n) est un zéro de P .

Etant donné (x_1, \dots, x_n) n éléments de B , l'ensemble des polynômes P vérifiant $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ est un idéal de $A[X_1, \dots, X_n]$, engendré par les $(X_i - a_i)$ pour $i \in [1, n]$.

1.2 Si A est un corps \mathbb{K}

PROPOSITION 0.2

Si \mathbb{K} est un corps, $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ est naturellement muni d'une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel.
Formule de Taylor, si \mathbb{K} est un corps de caractéristique nulle : soit $P \in \mathbb{K}[X]$, alors

$$P = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\nu!} (D^\nu P)(0) X^\nu.$$

1.3 Zoologie des polynômes à plusieurs indéterminées : les polynômes symétriques

Attention A est supposé ici anneau commutatif et unitaire.

DÉFINITION 0.2 polynôme symétrique

Soit $P \in A[X_1, \dots, X_n]$. P est dit **polynôme symétrique** si et seulement si pour tout σ permutation de $[1, \dots, n]$, $P(X_1, \dots, X_n) = P(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)})$.

On appelle **polynômes symétriques élémentaires** les polynômes de la forme

$$\Sigma_{k,n} = \sum_{1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq n} X_{a_1} X_{a_2} \dots X_{a_k} \text{ pour } 1 \leq k \leq n$$

On appelle **k -ième polynôme de Newton** le polynôme $N_k = \sum_{i=1}^n X_i^k$.

Les polynômes symétriques élémentaires sont de la forme suivante, dans le cas $n = 3$:

$$\begin{aligned} \Sigma_{1,3} &= X_1 + X_2 + X_3 \\ \Sigma_{2,3} &= X_1 X_2 + X_2 X_3 + X_1 X_3 \\ \Sigma_{3,3} &= X_1 X_2 X_3 \end{aligned}$$

Application On verra en section ?? une application des polynômes symétriques en géométrie et en section ?? une application aux polynômes à une indéterminée.

On ne donnera pas ici de preuve des résultats énoncés ; on pourra se référer à [1]. On a les propriétés suivantes :

- Les polynômes symétriques élémentaires sont symétriques (évident).
- Les polynômes de Newton sont symétriques (évident).
- Si Q est un polynôme à n indéterminées, alors $P = Q(\Sigma_{1,n}, \Sigma_{2,n}, \dots, \Sigma_{n,n})$ est un polynôme symétrique (facile).
- Si $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ est symétrique, alors il existe un polynôme Q tel que $P = Q(\Sigma_{1,n}, \Sigma_{2,n}, \dots, \Sigma_{n,n})$ (pas évident du tout, récurrence sur le nombre d'indéterminées et sur le degré du polynôme).
- **Relations de Newton** : Si $1 \leq k \leq n$ on a

$$N_k = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i N_{k-i} \Sigma_{i,n} + (-1)^k k \Sigma_{k,n}.$$

$$\text{Si } n \leq k, \text{ on a } N_k = \sum_{i=1}^n (-1)^i N_{k-i} \Sigma_{i,n}.$$

Références

- [1] P. Tauvel, *Mathématiques générales pour l'agrégation*, Masson, 1997.