Séries entières et fonctions holomorphes

Christophe Antonini[1], Olivier Teytaud[2], Pierre Borgnat[3], Annie Chateau[4], and Edouard Lebeau[5]

[1]Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes
[2]Chargé de rechercher INRIA, Université d'Orsay, Orsay
[3]Chargé de recherche CNRS, ENS Lyon, Lyon
[4]Maitre de conférence, Université Montpellier-2, Montpellier
[5]Enseignant en CPGE, Lycée Henri Poincaré, Nancy

22 septembre 2021

Tout sur les séries entières, introduction aux fonctions holomorphes.

1 Séries entières et fonctions holomorphes

On commencera par définir les séries entières (1.1), avant de voir l'essentiel lemme d'Abel (1.2). On verra alors qu'à l'intérieur du disque de convergence, tout se passe bien (1.3) alors qu'à sa frontière, les choses sont plus compliquées (1.4). On verra alors comment calculer un rayon de convergence (1.5).

Les sections suivantes traiteront des opérations sur les séries entières : dérivation (1.6), produit (1.7), développement en série entière (1.8).

Enfin, on conclura par quelques cas particuliers : l'exponentielle complexe (1.9) et les séries formelles et génératrices (1.10).

1.1 Définitions

Définition 0.1 **série entière**

On appelle **série entière** une série de fonctions de terme général $z \mapsto a_n.z^n$, avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On la note $\sum_n a_n.z^n$.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **suite des coefficients de la série entière**.

On appelle **domaine de convergence** d'une série entière l'ensemble des nombres complexes z tels que la somme $\sum a_n.z^n$ est bien définie.

1.2 L'indispensable : le lemme d'Abel

Le lemme d'Abel doit être présent en mémoire en toute circonstance et doit pouvoir être exhibé sans la moindre hésitation si un jour quelqu'un vous aborde, pointe un révolver sur vous et vous dit "Le lemme d'Abel ou la vie !".

LEMME 0.1 **Lemme d'Abel**

Soit z un nombre complexe tel que la suite $a_n.z^n$ soit <u>bornée</u>. Alors pour tout z' tel que $|z'| < |z|$, la série $\sum a_n.z'^n$ est <u>absolument convergente</u>, et donc z' appartient au domaine de convergence de la série entière.

Démonstration $|a_n.z'^n| = |a_n.z^n|.|z'/z|^n \leq M(\frac{|z'|}{|z|})^n$, *et* $\frac{|z'|}{|z|} < 1$*... Le résultat en découle.*

Ce lemme simple montre quelle est la forme du domaine de définition de la série ; c'est un disque. Maintenant que me voilà rassuré quant à votre avenir au cas où vous vous fassiez agresser par un mathématicien amateur désireux (à juste titre) d'apprendre ce résultat fondamental, le lemme d'Abel permet d'introduire une notion fondamentale en matière de séries entières : le rayon de convergence.

DÉFINITION 0.2 **rayon de convergence**

Le **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n.z^n$ est le sup des réels $r \geq 0$ tel que $a_n.r^n$ soit bornée. Le rayon de convergence peut éventuellement être infini, ou nul.

THÉORÈME 0.2 **Conséquence du lemme d'Abel**

Si la série $\sum a_n.z^n$ est de rayon de convergence R, alors :

•pour tout z de module $< R$ la série de terme général $\sum a_n.z^n$ est absolument convergente.

•pour tout z de module $> R$ la série de terme général $\sum a_n.z^n$ diverge, et en fait la suite $a_n.z^n$ n'est même pas bornée.

Démonstration *Il suffit de regarder le lemme d'Abel dans le blanc des yeux, et sa preuve pour le second point.*

Le disque ouvert de centre 0 et de rayon R s'appelle le **disque de convergence**. Lorsque $R = +\infty$, on appelle $\mathbb{C}$ tout entier le **disque de convergence**.

Le théorème que l'on vient de voir permet donc de classer les nombres complexes en deux catégories, l'une où la somme est convergente, avec plein de belles propriétés que l'on va voir, et un ensemble où il n'y a pas convergence ; toutefois, il reste une zone limite, sur laquelle nous n'avons pas eoncore de résultat, et sur laquelle nous en aurons bien peu ; le cercle de rayon le rayon de convergence, lorsque celui-ci est fini.

1.3 À l'intérieur du disque de convergence

À l'intérieur du disque de convergence, en général tout se passe bien. Le théorème suivant, en effet, *via* la convergence normale, assure diverses bonnes propriétés.

> THÉORÈME 0.3 **Fondamental**
>
> Si $\sum a_n.z^n$ a pour rayon de convergence R, la série de terme général $\sum a_n.z^n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout compact contenu dans le disque de centre 0 et de rayon R.

Démonstration *Soit K un tel compact, qu'on va supposer non vide. Alors K est nécessairement inclus dans un disque fermé de rayon r inférieur à R (en cas contraire considérer une suite x_n dans K tels que $R - |x_n| < 1/n$, et considérer sa limite, qui doit appartenir à K - tout compact étant fermé).*

$|a_n.z^n|$ est donc majoré par $|a_n|.r^n$, dont la série est absolument convergente. D'où la convergence normale.

Ce théorème va nous permettre de déduire pas mal de petites choses fondamentales :

•La somme d'une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence (preuve facile : la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue, donc pour prouver la continuité en x on considère un compact contenant x et inclus dans le disque de convergence ; il y a convergence normale, donc uniforme, sur ce compact)

⚠ *Attention 0.1* Même s'il y a convergence sur un disque *fermé*, on ne peut pas en déduire que la somme est continue sur le disque *fermé* !

•la somme f de la série entière $\sum a_n.z^n$ admet pour développement limité à l'ordre n en 0 $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a^k.z^k + o(z^n)$ (en fait, plus précisément, $O(z^{n+1})$) (preuve en écrivant $f(z) - \sum_{k=0}^{n} a^k.z^k$, et en factorisant par z^{n+1} ; le quotient est une série entière convergente, donc continue en 0).

•la somme f de la série entière $\sum a_n.z^n$ peut s'approximer uniformément par une suite de polynôme sur le disque fermé de centre 0 et de rayon r pour tout r *strictement* inférieur au rayon de convergence.

⚠ *Attention 0.2* Attention ! il ne s'agit pas d'un corollaire du théorème de Weierstrass d'approximation de fonctions continues uniformément par des polynômes car ici les fonctions vont de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$! (la preuve est en fait claire par les résultats précédents ; un disque fermé est compact, donc on applique le dernier théorème).

On a un résultat parfois utile à souligner aussi (l'intérêt étant dans le sens $\rightarrow$) :

> THÉORÈME 0.4
>
> Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence R. Alors f admet un prolongement continu sur le disque fermé de rayon R si et seulement si f est limite uniforme de polynômes sur le disque ouvert.

Démonstration *Il est clair que si f est limite uniforme d'une suite de polynômes sur le disque ouvert, alors cette suite converge uniformément sur le disque fermé, et sa limite est alors un prolongement continu de f.*

Réciproquement, supposons f prolongée par continuité sur le disque fermé.

•*Soit* $\epsilon > 0$.
•f *est uniformément continue sur ce disque, par le théorème* **??**.
•*On peut donc déterminer* $\alpha > 0$ *tel que* $|z - z'| \leq R.\alpha \Rightarrow |f(z) - f(z')| \leq \epsilon$.
•*On peut développer en série entière* $z \mapsto f(\frac{z}{1+\alpha})$ *sur le disque ouvert de rayon* $R.(1+\alpha)$. *On peut donc approximer cette fonction par un polynôme sur le disque fermé de rayon* R.
•*Soit donc un polynôme* P *tel que* $|P(z) - f(\frac{z}{1+\alpha})| \leq \epsilon$ *pour tout* z *de module* $\leq R$.
•*On constate alors que* z *et* $z/(1+\alpha)$ *sont à une distance* $\leq R.\alpha$ *; donc par définition de* α *trois lignes plus haut, on peut écrire que* $|f(z) - f(\frac{z}{1+\alpha})| \leq \epsilon$.
•*On a donc bien approximé* f *par* P *à* 2ϵ *près sur le disque fermé.*

⚠ *Attention 0.3* Bien noter que l'on a écrit que f était limite uniforme d'une suite de polynômes, mais pas que cette suite de polynômes était la suite $\sum_{k=0}^{n} a_n.z^n$! Il se peut que ce ne soit pas le cas...

1.4 À la limite du disque de convergence

On va juste présenter quelques cas, pour montrer que tout est possible ; soit convergence sur tout le cercle limite, soit divergence sur tout le cercle limite, soit tantôt convergence tantôt divergence.

•$\sum z^n$ a clairement pour rayon de convergence 1. Et il est non moins clair que sur tout le cercle de rayon 1 la somme diverge.

•$\sum z^n/n^2$ a clairement un rayon de convergence 1, et il est non moins clair que sur tout le cercle de rayon 1 la somme converge (absolument).

•$\sum z^n/n$ a toujours aussi clairement pour rayon de convergence 1. En 1, il est clair que la série diverge. Pour z de module 1 et différent de 1, alors la somme des z^k entre 0 et n est bornée (ça fait $\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$). On en déduit la convergence de la série $\sum \frac{z^n}{n}$ grâce à la *transformation d'Abel*, version discrète de l'intégration par partie.

La transformation d'Abel a été introduite en partie **??**, et l'on pourrait ici directement appliquer le théorème **??**.

Dans ce cas particulier (si $|z| = 1$, $z \neq 1$), si on note $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} z^k$ (suite bornée), alors on a $\forall N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sigma_n - \sigma_{n-1}}{n} = \frac{\sigma_0}{1} - \frac{\sigma_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} \sigma_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{\sigma_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sigma_n}{n(n+1)}.$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma_n}{n(n+1)}$ est absolument convergente (du fait que (σ_n) est bornée), et $1 - \frac{\sigma_N}{N}$ tend vers 1. Donc la suite $\sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n} = 1 - \frac{\sigma_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sigma_n}{n(n+1)}$ possède une limite, ce qui signifie bien que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ converge.

Lorsqu'il y a convergence de la série en un point du cercle ayant pour rayon le rayon de convergence, on peut étudier la continuité de la fonction somme autour de ce point.

Ainsi :

Théorème 0.5 **Continuité jusqu'au bord du disque de convergence**

Soit f la somme d'une série entière $\sum a_n.z^n$ de rayon de convergence $R \in]0, \infty[$. On suppose que cette série converge en un point z_0 de module R. Alors la fonction f est continue sur le segment $[0, z_0]$ (= un rayon).

Démonstration

On doit démontrer la continuité de la fonction $\varphi(t) = f(tz_0) = \sum_{n\geq 0} a_n.(tz_0)^n$ pour $t \in [0,1]$. On pose pour tout n : $b_n = a_n.{z_0}^n$, de sorte que $\forall t \in [0,1]$, $\varphi(t) = \sum_{n\geq 0} b_n t^n$.

L'hypothèse selon laquelle le point z_0 appartient au domaine de définition de la série $\sum a_n.z^n$ se traduit simplement par le fait que la série $\sum b_n$ converge. Il n'y a pour autant pas forcément convergence normale de la série des $b_n t^n$ sur $[0,1]$ (il faudrait pour cela que $\sum b_n$ converge absolument).
Nous allons démontrer la continuité de φ sur $[0,1]$ grâce à une variante de la transformation d'Abel utilisée plus haut.

Si l'on note $R_n = \sum_{k\geq n+1} b_n$ le reste d'ordre n de la série des b_n, avec la convention $R_{-1} = \sum_{k\geq 0} b_n = \varphi(1)$, alors $\forall t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\varphi(t) = & \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \frac{z^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} (R_{n-1} - R_n) t^n = \sum_{m=0}^{\infty} R_{m-1} t^m - \sum_{n=0}^{\infty} R_n t^n \\ = & \quad R_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} R_n (t^{n+1} - t^n) \ = \ \varphi(1) + (t-1) \sum_{n=0}^{\infty} R_n t^n.\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. Le fait que la série $\sum b_n$ converge implique que la suite (R_n) est bien définie, et que $\lim_n R_n = 0$.

Il existe donc N tel que $\forall n > N$, $|R_n| < \frac{\epsilon}{2}$.

Notons alors $M = \sum_{n=0}^{N} |R_n|$, et $\alpha = \frac{\epsilon}{2M}$.

On a alors $\forall t \in [0,1[$, $|t-1| \leq \alpha$,

$$\begin{aligned}|\varphi(t) - \varphi(1)| = & \quad |t-1| \left| \sum_{n=0}^{\infty} R_n t^n \right| \\ \leq & \quad |t-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n|.t^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} |R_n|.t^n \right) \\ \leq & \quad \alpha \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \frac{\epsilon}{2}|t-1| \sum_{n=N+1}^{\infty} t^n \ \leq \ \alpha M + \frac{\epsilon}{2}|t-1| \sum_{n=0}^{\infty} t^n \leq \quad \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}|t-1|.\frac{1}{1-t} \ \leq \ \epsilon.\end{aligned}$$

Ceci prouve bien la continuité (à gauche) de φ en 1.

⚠ *Attention 0.4* On ne prouve tout de même pas que f est continue sur tout son domaine de convergence !
On peut néanmoins améliorer le résultat de ce théorème : sous les mêmes hypothèses, la somme f de la série entière est en fait continue sur les secteurs angulaires (tronqués), de sommet z_0 et dirigés vers l'intérieur du disque de convergence.

Exemple 0.5 •On verra en partie 1.8 la formule $\forall t \in]-1,1[$, $\ln(1+t) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$.

La série entière converge en $t = 1$ ($\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est une série alternée), donc la formule ci-dessus s'étend par continuité jusqu'en $t = 1$. On a ainsi la formule

$$\ln\ 2 = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

•De même, de $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n t^{2n}$ (pour $|t| < 1$) on peut déduire la formule $\forall t \in]-1,1[$, $arctan(t) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}$.

Ici, la série converge en $t = \pm 1$, donc cette formule est vraie par continuité sur $[-1, 1]$. Les résultats sont équivalents en ± 1 (car la fonction est impaire) et l'on a la formule

$$arctan\ 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

1.5 Comment déterminer un rayon de convergence ?

THÉORÈME 0.6 **Règle de D'Alembert**

On se donne $\sum a_n.z^n$ une série entière. On suppose que les a_n sont non nuls, au moins à partir d'un certain rang, et on suppose que a_{n+1}/a_n tend vers L. Alors $R = 1/L$.

Démonstration

Ce théorème est une conséquence immédiate du critère de D'Alembert **??** *dans la détermination de la convergence de séries.*

On peut généraliser ce résultat ainsi :

THÉORÈME 0.7 **Formule d'Hadamard**

On se donne $\sum a_n.z^n$ une série entière. Soit $L = limsup|a_n|^{1/n}$, alors le rayon de convergence est $R = 1/L$ (avec $1/0 = +\infty$ et $1/+\infty = 0$).

Démonstration

•*Cas $0 < L < +\infty$: soit $R = 1/L$, montrons que R est rayon de convergence.*

– *si $|z| < R$, $a_n.z^n = O((L.|z|)^n)$, or $L.|z|$ est plus petit que 1 ; donc notre série est un $O()$ d'une série absolument convergente, donc elle converge absolument.*

– *si $|z| > R$, $a_n.z^n$ ne tend pas vers 0, car sa $limsup$ ne tend pas vers 0, et donc $\sum a_n.z^n$ diverge.*

•*Les autres cas se déduisent facilement de celui-ci.*

1.6 Dérivation des séries entières

DÉFINITION 0.3 **série dérivée d'ordre** p

On se donne $\sum_{n \geq 0} a_n.z^n$ une série entière ; on appelle **série dérivée d'ordre** p la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p}.z^n$.

On appelle **série dérivée** (tout court !) d'une série entière la série dérivée d'ordre 1.

THÉORÈME 0.8

La série dérivée (d'ordre p) $\sum_{n \geq 0} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p}.z^n$ d'une série entière $\sum a_n.z^n$ de rayon de convergence R a le même rayon de convergence R.

Démonstration

• On procède par récurrence, la série dérivée d'ordre p étant la dérivée d'ordre 1 de la dérivée d'ordre $p-1$; il suffit de montrer le résultat pour $p=1$.

•On suppose donc $p=1$.

•La série dérivée est donc une série de terme général $(n/z).a_n.z^n$. Donc en valeur absolue pour $n \geq z$, le terme général est supérieur en module à celui de la série $\sum a_n z^n$. Donc le rayon de convergence est inférieur ou égal à R.

•Montrons maintenant qu'il est supérieur ou égal à R. On se donne z de module $< R$, et un réel $r < R$ tel que $|z| < r < R$.

•$(n+1).|a_{n+1}|.|z|^n \leq ((\frac{|z|}{r})^{n+1}.(n+1)/z).|a_{n+1}|.|r|^{n+1}$

•Le terme ci-dessus est plus petit que $|a_{n+1}|.|r|^{n+1}$ pour n assez grand.

Remarquons que ce résultat pouvait également se déduire du théorème d'Hadamard.

Un corollaire immédiat :

Corollaire 0.9

Si f est une somme de série entière (de rayon de convergence > 0), alors $f^{(n)}(0)$ est égal à $n!.a_n$ si $f = \sum a_n z^n$.

Plus généralement, on a

Théorème 0.10

Si f est une somme de série entière $f = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$, alors f est dérivable sur $]-R, R[$ et holomorphe sur $D(0,R)$, et la dérivée p-ième de la somme f est la somme de la série dérivée d'ordre p : $\forall z$,

$$|z| < R \implies f^{(p)}(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n+p} \frac{(n+p)!}{n!} z^n.$$

Démonstration *Ce résultat se déduit de la convergence uniforme (sur les compacts de $D(0,R)$) des séries dérivées.*

On en déduit un autre corollaire : l'unicité des coefficients d'une série entière :

Corollaire 0.11

Si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ (sur un disque $D(0,\alpha)$, $\alpha > 0$, i.e. avec un rayon de convergence > 0), alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Application 0.6 on peut dériver les séries entières mais on peut aussi les intégrer. On pourrait par exemple déduire du développement de $1/(1+t)$ celui de $1/(1+t^2)$, et par suite celui de *arctan* t.

1.7 Produit de séries entières

Définition 0.4 **série entière produit**

Étant donnée deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$, on définit la **série entière produit** par $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$, avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, et la **série entière somme** par $\sum_{n\geq 0} d_n z^n$ avec $d_n = a_n + b_n$.

Il est bien évident que le rayon de convergence de la série entière somme de deux séries entières est au moins le min R des deux rayons de convergence, et que la fonction somme est dans le disque $D(0,R)$ la somme des deux fonctions sommes des deux autres séries.

En appliquant les résultats de la partie **??** on montre aussi que deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence $\geq R$ ont un produit convergeant sur le disque $D(0,R)$ (avec R toujours le min des deux rayons de convergence) et que la série produit sur $D(0,R)$ a une somme égale au produit des deux fonctions sommes obtenues pour les deux séries entières.

1.8 Développement en série entière

Définition 0.5 **Développement en série entière**

On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Une application f d'un ouvert U de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ est dite **développable en série entière au voisinage de** $a \in U$ s'il existe $\sum a_n.z^n$ de rayon de convergence $\geq r > 0$ telle que $D(a,r) \subset U$ et $\forall z \in D(a,r)$ on ait $f(z) = \sum a_n.(z-a)^n$.

f est dite **analytique** sur $V \subset U$ avec V un ouvert de $\mathbb{K}$ si elle est développable en série entière au voisinage de chaque point de V.

Théorème 0.12

Soit $\sum a_n.z^n$ une série entière de rayon de convergence R. La somme f de cette série entière est analytique sur son disque ouvert de convergence.

Le développement en série entière de f en a est donné sur le disque centré sur a et de rayon $R - |a|$ par

$$f(z) = \sum_n \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

Démonstration

$$f^{(p)}(z) = \sum_n \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} z^n$$

$$\textit{et donc } |f^{(p)}(z)| \leq \sum_n \frac{(n+p)!}{n!} |a_{n+p}| z^n$$

Pour $|z| \leq r < R$, on peut donc écrire

$$\sum_n \left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| (r-|z|)^n \leq \sum_{n,p\geq 0} \frac{(n+p)!}{n!p!} |a_{n+p}|.|z|^p (r-|z|)^n$$

Montrons que la série de droite converge ; pour cela on limite la somme à n et p inférieurs à N et on fera tendre ensuite N vers $+\infty$

$$\sum_{0\leq n,p\leq N} C^n_{n+p}|a_{n+p}|.|z|^p(r-|z|)^n$$

$$\leq \sum_n |a_n|(\sum_{p=0}^n C^p_n|z|^p(r-|z|)^{n-p})$$

$$\leq \sum_n |a_n|r^n < \infty$$

La série étant absolument convergente, on peut permuter les termes comme on le souhaite, et donc

$$\sum_n \frac{f^n(z)}{n!}(z'-z)^n = \sum_{n,p\geq 0} C^p_{n+p}a_{n+p}z^p(z'-z)^n$$

$$= \sum_n a_n(\sum_{p=0}^n C^p_n z^p(z'-z)^n) = \sum_n a_n z'^n$$

D'où le résultat.

Exemple 0.7 •Tout polynôme est analytique sur $\mathbb{C}$.

•L'exponentielle complexe, ainsi que les fonctions cosinus et sinus (que l'on va définir ci-après) sont analytiques sur $\mathbb{C}$.

•Pour tout réel α, la fonction $z \mapsto (1+z)^\alpha$ est analytique sur $D(0,1)$, avec $\forall z \in \mathbb{C},\ |z|<1 \ \Rightarrow\ (1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n$.

•La détermination principale du logarithme est analytique sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$. On a notamment $\forall z \in \mathbb{C},\ |z|<1 \ \Rightarrow\ \ln(1+z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$.

Corollaire 0.13

L'ensemble des points d'analycité d'une application est ouvert.

Démonstration *Évident au vu du résultat ci-dessus.*

1.9 L'exponentielle complexe

Définition 0.6 **exponentielle**

On appelle **exponentielle** l'application qui à $z \in \mathbb{C}$ associe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$. On la note $z \mapsto e^z$ ou $z \mapsto \exp(z)$.

Il est à noter que cette série entière est bien définie partout, par le critère de D'Alembert. La convergence de la série est donc uniforme sur tout compact, et exp est donc holomorphe et entière [1]. La dérivation terme à terme, légitimée par la convergence uniforme des dérivées (voir théorème **??**, ou 0.10), montre que la dérivée de exp est exp.

1. Une fonction entière est une fonction holomorphe sur tout le plan.

Notons tout de même que le résultat sur le produit des séries implique que pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z+z') = \exp(z).\exp(z')$.

D'autres propriétés de l'exponentielle sont fondamentales ; on les trouvera dans le formulaire, avec les schémas de preuve, en partie **??**.

On peut aussi définir les fonctions *cosinus* et *sinus* :

DÉFINITION 0.7 **cosinus**

•On appelle **cosinus** et l'on note $z \mapsto \cos z$l'application qui à $z \in \mathbb{C}$ associe $\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

•On appelle **sinus** et l'on note $z \mapsto \sin z$ l'application qui à $z \in \mathbb{C}$ associe $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

1.10 Séries formelles et séries génératrices

DÉFINITION 0.8 **ensemble des séries formelles sur** A

Étant donné A un anneau, on note $A[[X]]$ et on appelle **ensemble des séries formelles sur** A l'ensemble des suites à valeurs dans A. Une telle suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera notée

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$$

On dit parfois aussi que $\sum a_n X^n$ est la **série génératrice** associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On munit $A[[X]]$ d'une structure d'anneau en définissant une somme et un produit par

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n) + (\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)X^n$$

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n) \times (\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(a_k b_{n-k})X^n$$

Étant donnée V une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on appelle aussi **série génératrice** associée à V la série $\sum P(V=n)X^n$.

Application 0.8 Les séries génératrices ont des applications aux probabilités. Le livre [1] donne aussi une application aux nombres de Catalan (i.e. c'est un dénombrement basé sur un produit de séries formelles), que l'on étudie ci-après. La proposition **??** est un autre exemple.

Voici la définition des nombres de Catalan : C_n est le nombre de <u>bons</u> parenthésages que l'on peut obtenir avec n paires de parenthèses. Par exemple, $C_3 = 5$, car avec 3 paires de parenthèses on peut écrire ()()() ; (())() ; ()(()) ; ((())) et (()()).

Par analogie (parenthèse ouvrante = monter / parenthèse fermante = aller à droite), le nombre de Catalan C_n est aussi le nombre de chemins allant toujours vers le haut ou la droite, qui relient $(0,0)$ à (n,n) dans $\mathbb{N}^2$, et qui restent toujours sur ou au-dessus de la diagonale.

En partitionnant en fonction de k tel que $2k$=l'endroit où la première parenthèse se referme, on constate que l'on a clairement la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \qquad (*)$$

avec la convention $C_0 = 1$.

Cette formule rappelle celles que l'on trouve dans le produit de séries entières ou formelles, c'est ce qui nous incitera à considérer le carré de la fonction φ ci-après définie.

Soit donc φ la somme de la série entière $\varphi(x) = \sum_{n\geq 0} C_n.x^n$.

L'analogie avec les chemins implique que $\forall n$, $C_n \leq$ nombre de chemins reliant $(0,0)$ à (n,n), et ainsi $C_n \leq C_{2n}^n$.

Comme $\lim \frac{C_{2(n+1)}^{n+1}}{C_{2n}^n} = \lim \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4$, la série définissant φ a un rayon de convergence $\geq \frac{1}{4}$.

En calculant $\varphi^2(x)$, on a d'après la partie 1.7 :

$$\begin{aligned}\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[, \quad \varphi^2(x) = & \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}\right) x^n \\ = & \sum_{n\geq 0} C_{n+1}.x^n \quad \text{(d'après (*))} = \frac{\varphi(x) - C_0}{x} = \frac{\varphi(x)-1}{x}.\end{aligned}$$

En résolvant cette équation du second degré, on trouve que $\forall x \in]-1/4, 1/4[\setminus\{0\}$, $\varphi(x) = \frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$.

Comme pour toute série entière, la somme φ est continue sur le disque de convergence, ce qui implique que

$$\forall x \in]-1/4; 1/4[, \quad \varphi(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Du développement en série entière de $(1+z)^\alpha$ vu dans la partie 1.8, on déduit que $\forall t \in]-1, 1[$,

$$\sqrt{1+t} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)...(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}.t^n = \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}.t^n.$$

On en déduit que $\forall x \in]-1/4, 1/4[$,

$$\sqrt{1-4x} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}.(-4x)^n = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}.x^n.$$

Finalement, on a $\forall x \in]-1/4, 1/4[$,

$$\varphi(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}.x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.x^n.$$

Par unicité des coefficients lorsque le rayon de convergence est > 0 (corollaire 0.11), on peut identifier avec $\varphi(x) = \sum C_n.x^n$, et donc on peut écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{C_{2n}^n}{n+1},$$

ce qui achève le calcul des nombres de Catalan.

1.11 Fonctions holomorphes

Un ouvrage de référence est [2], dont nous suivons ici la démarche. Après les généralités (1.11.1), on verra le théorème de Cauchy (1.11.2), quelques éléments de topologie (1.11.3), et enfin divers éléments périphériques rassemblés en section « zoologie » (1.11.4).

1.11.1 Généralités

On va ici se préoccuper de fonctions de Ω dans $\mathbb{C}$, avec Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

DÉFINITION 0.9 **dérivable au sens complexe en $a \in \Omega$ si**

Une fonction est dite **dérivable au sens complexe en** $a \in \Omega$ **si** $lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On note alors cette limite $f'(a)$.

Une fonction est dite **holomorphe sur** Ω si elle est dérivable au sens complexe en tout point de Ω. On note $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

On notera $D(a, r)$ (resp. $D'(a, r)$) avec $r > 0$ l'ensemble des x de Ω tels que $|x - a| < r$ (resp. $0 < |x - a| < r$).

Un domaine est un ouvert connexe non vide.

On remarque immédiatement que :

- $H(\Omega)$ est un anneau pour l'addition et la multiplication usuelles, et on a pour f, $g \in H(\Omega)$: $(f + g)' = f' + g'$ et $(fg)' = f'g + fg'$.
- la composée de deux fonctions holomorphes est holomorphe, avec $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$.
- tout polynôme est holomorphe sur $\mathbb{C}$
- l'inverse d'une fonction holomorphe ne s'annulant pas est holomorphe
- l'exponentielle complexe est holomorphe sur $\mathbb{C}$
- toute série entière est holomorphe à l'intérieur de son disque de convergence ; et si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.(z - a)^n$, alors $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n.c_n.(z - a)^{n-1}$

1.11.2 Le théorème de Cauchy

On verra ici le théorème de Cauchy et de très nombreuses implications importantes ; les fonctions holomorphes sont indéfiniment dérivables, une fonction holomorphe est localement bijective, au voisinage de tout point où sa dérivée est non nulle, les zéros des fonctions holomorphes non nulles sont isolés, une fonction holomorphe est entièrement déterminée dans un disque par ses valeurs à la frontière de ce disque (attention au détails des hypothèses, notamment de connexité, plus bas).

PROPOSITION 0.14

Soit μ une mesure complexe sur un espace mesurable X, ϕ une fonction complexe mesurable, Ω un ouvert du plan qui ne rencontre pas $\phi(X)$.

Alors avec

$$f(z) = \int_X \frac{d\mu(t)}{\phi(t) - z}$$

définie pour $z \in \Omega$, on a $f \in H(\Omega)$.

Démonstration

$\bullet$*On développe en série entière $1/(\phi(t)-z)$ sur un disque suffisamment petit pour être inclus dans Ω et pour que la convergence soit uniforme.*

$\bullet$*On permute alors l'intégrale et la somme (merci la convergence uniforme), et on obtient bien le résultat désiré.*

Définition 0.10 **courbe**

On appelle **courbe** une application continue d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

On appelle **chemin** une application continue C^1 par morceaux d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Une courbe ou un chemin γ est dit **fermé** si $\gamma(a)=\gamma(b)$.

Étant donné γ une courbe, on note γ^* l'image de $[a,b]$ par γ.

Étant donné γ un chemin et f une fonction continue sur γ^*, on note $\int_\gamma f(z).dz$ l'intégrale $\int_{[a,b]} f(t).\gamma'(t).dt$, on appelle cette intégrale l'intégrale de f le long de γ.

Deux chemins γ et $\tilde{\gamma}$ sont dits équivalents, si pour toute fonction f continue sur γ^* et $\tilde{\gamma}^*$ l'intégrale de f le long de γ est égale à l'intégrale de f le long de $\tilde{\gamma}$.

La **longueur** d'un chemin γ est $\displaystyle\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$.

On appelle **indice** de z pour $z\in\Omega$ par rapport à γ, avec Ω le complémentaire de γ^*, le complexe

$$Ind_\gamma(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dt}{t-z}$$

Intuition Si ϕ est une fonction C^1 de $[a,b]$ dans $[c,d]$, si γ, $\tilde{\gamma}$ sont des chemins d'intervalles de définitions respectifs $[a,b]$ et $[c,d]$ tels que $\gamma=\tilde{\gamma}\circ\phi$ alors l'intégrale le long de γ est la même que l'intégrale le long de γ' ; c'est-à-dire qu'un reparamétrage C^1 transforme un chemin en un chemin équivalent.

Théorème 0.15 **Indice**

Soit Ω le complémentaire de γ^*. L'indice de z par rapport à γ est entier, constant sur chaque composante connexe de Ω, et nul sur la seule composante connexe de Ω qui ne soit pas bornée.

Démonstration

$\bullet$*Pour voir qu'il y a une seule composante connexe non bornée, c'est facile, il suffit de voir que γ^* est inclus dans un disque ; le complémentaire de ce disque est connexe et donc inclus dans une composante connexe.*

$\bullet$*Pour voir que l'indice est un entier, on suppose l'arc défini sur $[0,1]$, on considère la fonction qui à t associe $\exp(\int_0^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-z}.du)$. En dérivant cette fonction, on obtient qu'elle est proportionnelle à $\gamma(t)-z$. Ainsi,*

$$\exp\left(2i\pi Ind_\gamma(z)\right)=1.$$

$\bullet$*On déduit de ça que notre fonction prend la valeur 1 en 1, ce qui est juste ce qu'il nous fallait pour que l'indice soit entier.*

•L'indice est constant sur chaque composante connexe, puisqu'il est continu et que chaque composante connexe a donc une image connexe.

•$|\frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(s).ds}{\gamma(s)-z}| \leq |\frac{M}{2\pi}\int_0^1 \gamma'(s).ds|$, avec M un majorant de $|\frac{1}{\gamma(s)-z}|$. M tendant vers 0 pour z tendant vers l'infini, l'indice est de module inférieur à 1 pour z assez grand, et donc il est nul sur la composante connexe non bornée.

Remarque 0.1 - On montre facilement que l'indice d'un point z par rapport au chemin $[0, 1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{2i\pi.t}$, est 1 si $|z| < 1$ et 0 sinon.

– Il peut être adéquat de prendre le temps d'établir qu'une seule composante connexe est non bornée.

– On montre facilement que l'intégrale de la dérivée d'une fonction holomorphe le long d'une chemin fermé est nulle. Par suite, l'intégrale d'un polynôme le long d'un chemin fermé est nulle.

LEMME 0.16 **Théorème de Cauchy dans le cas d'un triangle dans un convexe**

Soit un triangle de sommets a, b et c. L'intégrale le long de ce triangle est en fait l'intégrale suivant $[a, b]$, plus l'intégrale suivant $[b, c]$, plus l'intégrale suivant $[c, a]$.

On suppose Ω convexe contenant a, b et c.

Alors soit f une fonction continue sur Ω, et holomorphe sur $\Omega \setminus \{p\}$, avec $p \in \Omega$.

Alors l'intégrale de f le long du triangle est nulle.

(On montrerait facilement le même résultat pour un carré où n'importe quel autre polygone, en le triangulant)

Démonstration

Il faut distinguer trois cas

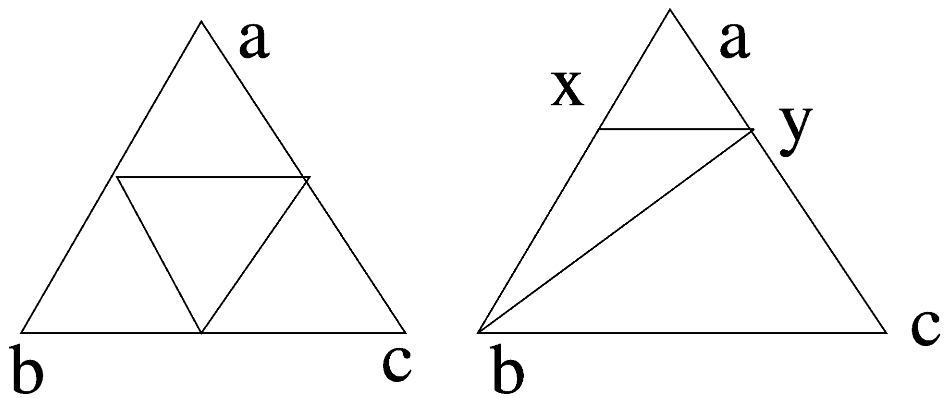
•p n'est sur aucun des trois côtés du triangle. Alors on coupe le triangle en quatre plus petits triangles, comme sur la figure **??** *(schéma de gauche), et on constate que l'intégrale sur au moins l'un des triangles doit être de valeur absolue le quart de la valeur absolue de l'intégrale le long du gros triangle ; or la longueur du petit triangle est la moitié de la longueur du gros. On construit ainsi par récurrence une suite de triangles $\mathbb{D}_n$ de longueur $L.2^{-n}$. On considère le point x, intersection des triangles.*

Soit ϵ un réel > 0. f est dérivable en x. Il existe donc un triangle $\mathbb{D}_n$ tel que pour z dans $\mathbb{D}_n$, $f(z) - f(x) - f'(x).(z - x)$ est de module inférieur à $\epsilon.|z - x|$. Or l'intégrale d'une fonction polynôme sur un chemin fermé est nulle, puisqu'un polynôme est la dérivée d'un autre polynôme.

On obtient ainsi que l'intégrale le long du petit triangle est majorée par $\epsilon.(2^{-n}.L)^2$; et puisque l'intégrale sur le grand triangle initial est majorée par 4^n fois le module de l'intégrale sur le triangle $\mathbb{D}^n$, on en déduit que cette intégrale est nulle.

•On suppose maintenant que p est égal à a (b ou c se traitent bien sûr de même). Alors on place x et y comme sur la figure **??** *(schéma de droite) ; l'intégrale de f sur les triangles xyb et ybc est nulle ; et celle sur axy peut être rendue aussi petite qu'on le souhaite, puisqu'il suffit de faire tendre x et y vers a (rappelons que f est continue, sur un compact, donc bornée).*

•Supposons maintenant que p soit un point de $]a, b[$; il suffit alors de raisonner sur abp, bcp et cap pour conclure.



⚠ *Attention 0.9* Ceux qui ont un peu d'avance auront constaté que l'hypothèse implique en fait que f soit holomorphe sur tout Ω ; mais nous avons besoin de notre lemme avec ces hypothèses-ci afin d'arriver à prouver les résultats qui suivent.

On passe maintenant à une version un peu plus forte :

THÉORÈME 0.17 **Théorème de Cauchy dans un ensemble convexe**

On suppose Ω ouvert et convexe, p dans Ω, f continue sur Ω et $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$.
Alors l'intégrale de f le long de γ est nulle pour tout chemin γ fermé tel que $\gamma^* \subset \Omega$.

Démonstration *On fixe un point a de Ω, et on définit $F(z)$ pour z dans Ω comme l'intégrale sur $[a, z]$ de f.*

On raisonne alors sur des triangles a, z, x pour considérer la limite de $\frac{F(z)-F(x)}{z-x}$ pour x tendant vers z. On montre facilement que cette limite est f, et donc que f est une dérivée et est continue, et donc le résultat est clair.

THÉORÈME 0.18 **Formule de Cauchy dans un ensemble convexe**

On se donne γ un chemin fermé dans un ouvert convexe Ω, et f holomorphe sur Ω. Si $z \in \Omega$ et $z \notin \gamma^*$ alors

$$f(z).Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}.du$$

Démonstration

On se donne z vérifiant les hypothèses. On définit alors g par $g(u) = \frac{f(u)-f(z)}{u-z}$ si $u \in \Omega$ et $u \neq z$, et $g(z) = f'(z)$.

La fonction g est continue, et holomorphe en tout point de $\Omega \setminus \{z\}$, donc d'après le théorème 0.17, on a $\int_\gamma g(u).du = 0$. En coupant g en ses deux termes $\frac{f(u)}{u-z}$ et $\frac{f(z)}{u-z}$, on obtient le résultat désiré.

On arrive maintenant à un résultat fondamental d'analyse complexe, facilement démontrable grâce aux résultats qui précèdent.

Théorème 0.19 Développement en série entière des fonctions holomorphes

Toute fonction holomorphe est développable en série entière.

Démonstration *On se donne a dans Ω, et un disque suffisamment réduit $D(a,r)$ centré en a pour être inclus dans Ω.*

Alors on applique la formule de Cauchy (théorème 0.18) à f sur le convexe $D(a,r)$, avec pour γ l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ définie par $t \mapsto a + re^{2i\pi.t}$.

On obtient une expression de $f(z)$ qui permet d'appliquer la proposition 0.14, et on a fini.

Remarquons qu'une fonction holomorphe est développable en série entière, donc sa dérivée est développable en série entière, donc sa dérivée est holomorphe. La dérivée d'une fonction holomorphe est donc une fonction holomorphe. En fait une fonction $\mathbb{C}$-dérivable (i.e. dérivable au sens complexe) est C^∞.

Enfin un théorème qui peut servir et qui n'est pas difficile à montrer avec les outils que nous avons définis ci-dessus :

Théorème 0.20 Théorème de Morera

Soit f une fonction continue complexe dans un ouvert Ω dont l'intégrale sur tout triangle est nulle. Alors f est holomorphe sur Ω.

Démonstration

- *On considère un disque ouvert D inclus dans Ω centré sur a.*
- *On construit une fonction F sur D dont f est la dérivée, par $F(z) = \int_{[a,z]} f(u).du$ (on utilise le fait que le disque est convexe).*
- *F est holomorphe, donc sa dérivée f est holomorphe.*
- *Puisque tout cela est valable pour n'importe quel disque inclus dans Ω, f est holomorphe sur Ω.*

Application 0.10 Voir le théorème 0.26.

Maintenant on va voir plein de conséquences de ces importants théorèmes.

Théorème 0.21

Soit f une fonction holomorphe sur Ω un ouvert <u>connexe</u>. Soit Z l'ensemble des z tels que $f(z) = 0$. Alors soit Z est égal à Ω, soit Z n'a pas de point d'accumulation dans $\mathbb{C}$.

Si Z n'est pas Ω alors peut pour tout a dans Z trouver un entier positif unique m tel que $f(z) = (z-a)^m.g(z)$, avec g holomorphe non nulle en a. L'ensemble des zéros de f est dans ce cas au plus dénombrable.

Application 0.11 On verra une belle application de ce théorème avec le théorème de Runge 0.36.

Démonstration *Soit Z' l'ensemble des points d'accumulation de Z. $Z' \subset Z$, car f étant continue, Z est fermé.*

On considère le développement en série entière de f sur un disque D centré sur a quelconque dans Z :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n.(z-a)^n$$

pour tout $z \in D$.

Si les c_n ne sont pas tous nuls, on considère le plus petit entier m tel que $c_m \neq 0$. On sait alors que g, définie par $g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^m}$ si $z \neq a$ et $g(a) = c_m$, vérifie les conditions demandées. Par continuité de g, on peut alors déduire que a est un point isolé de Z, puisque g est non nul sur un voisinage de a.

Le fait que Z ne contienne aucun point d'accumulation implique que Z contient un nombre fini de points sur toute boule de rayon n, et donc que Z est au plus dénombrable.

De tout ça on déduit que si a est dans Z', alors il y a un disque autour de a qui est aussi dans Z'. Donc Z' est ouvert, puisqu'il contient un disque centré sur a pour tout a dans Z'. Mais il est aussi fermé, puisqu'il est un ensemble de points d'accumulations. Donc s'il n'est pas vide et que l'on travaille dans un connexe, Z' est égal à Ω.

On remarque au passage que deux fonctions holomorphes égales sur un ensemble ayant un point d'accumulation sont donc nécessairement égales (leur différence est holomorphe et nulle sur un ensemble ayant un point d'accumulation). Ce résultat est connu sous le nom de **principe de prolongement analytique**.

DÉFINITION 0.11 **ordre**

On appelle m l'**ordre** du zéro de f en a.

Si f est holomorphe sur un ouvert Ω privé d'un point a, et n'est pas holomorphe en a, on dit que f admet une **singularité isolée** en a.

La singularité est dite **artificielle** si en changeant $f(a)$ on peut rendre f holomorphe en a.

THÉORÈME 0.22

Si f admet une singularité isolée en a et est bornée sur un voisinage de a, alors la singularité est artificielle.

Démonstration

•On définit h par $h = (z \mapsto (z-a)^2.f(z))$, et $h(a) = 0$.

•h est holomorphe, on la développe en série entière, $h(z) = \sum_{n \geq 2} c_n.(z-a)^n$ (h est nulle et de dérivée nulle en a, puisque f est bornée sur un certain voisinage de a).

•Il ne reste alors plus qu'à poser $f(a) = c_2$.

On peut faire encore plus fort :

THÉORÈME 0.23

Soit $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$, alors l'un des cas suivants se produit :

— f admet une singularité artificielle en a ou pas de singularité du tout

— il existe des c_i en nombre fini tels que $z \mapsto f(z) - \sum \frac{c_i}{(z-a)^i}$ admette une singularité artificielle en a.

— L'image de tout voisinage de a par f est dense dans $\mathbb{C}$

Démonstration

•Supposons qu'on ne soit pas dans le troisième cas, et choisissons z tel que z n'appartienne pas à l'adhérence de $f(D'(a,r))$ avec $r > 0$.

•*Définissons* $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$

•*g est holomorphe sur $D'(a,r)$, et est bornée dans un voisinage de a ; donc g est prolongeable en une fonction holomorphe sur $D(a,r)$.*

•*Si $g(a) \neq 0$, alors f est prolongeable en une fonction holomorphe, et on n'en parle plus, c'est le premier cas.*

•*Sinon, alors on considère m l'ordre du zéro de g en a, et on développe en série entière $z \mapsto \frac{(z-a)^m}{g(z)}$.*

•*La suite est laissée en exercice au lecteur.*

DÉFINITION 0.12 **partie principale du pôle de f en a**

Dans le deuxième cas, $\sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{(z-a)^i}$ est appelé **partie principale du pôle de f en a** ; m est appelé l'ordre du pôle en a.

c_1 est appelé **résidu** de f en a ; on le note $Res(f;a)$.

Dans le troisième cas, on dit que f a une **singularité essentielle** en a.

Dans le premier cas, on dit que f a une **singularité artificielle** en a.

Le théorème suivant relie les coefficients d'une série entière aux intégrales sur le cercle unité :

THÉORÈME 0.24

On se donne f une série entière :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n.(z-a)^n$$

pour $|z| < R$. Alors pour tout r tel que $0 < r < R$ on a

$$\sum_{\mathbb{N}} |c_n|^2.r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2.d\theta$$

Démonstration *Considérer la formule de Parseval (voir théorème* **??***), avec la base des $\theta \mapsto e^{-in\theta}$.*

Quelques corollaires pas trop difficiles :

— une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ est soit constante soit non bornée

— si f holomorphe n'est pas constante sur un domaine (i.e. ouvert connexe) Ω, alors tout voisinage de a contient un point b tel que $|f(b)| > |f(a)|$.

Autre corollaire :

THÉORÈME 0.25 **Estimations de Cauchy**

f holomorphe sur un disque ouvert D de rayon R, $|f|$ bornée par M sur D, alors $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!\ M}{R^n}$ pour tout $n \geq 0$.

Application 0.12 Ceci servira pour le théorème 0.26 et pour le théorème **??**.

Passons maintenant à des propriétés de passage à la limite :

Théorème 0.26

Soit f_n une suite de fonctions holomorphes sur Ω tendant vers f uniformément sur tout compact de Ω. Alors f est holomorphe, et les f_n' convergent uniformément sur tout compact vers f'.

Démonstration

•*f est continue comme limite uniforme sur tout compact d'une suite de fonctions continues.*

•*Pour le caractère holomorphe de f, on regarde ce qu'il se passe sur des diques ouverts (Ω étant réunion de tels disques) et il suffit ensuite de considérer l'intégrale de f sur le contour d'un triangle inclus dans un disque (un tel disque étant convexe) ; l'intégrale d'une limite uniforme étant la limite de l'intégrale, on déduit que l'intégrale de f sur tout triangle est nulle. Le théorème de Morera (voir théorème 0.20) permet de conclure.*

•*On utilise ensuite le théorème 0.25 pour voir que $|f'(z)-f_n'(z)| \leq \frac{1}{r}\|f-f_n\|_K$, avec K un compact ; d'où la convergence uniforme des dérivées, et le résultat désiré.*

Théorème 0.27 **Théorème des résidus**

On suppose Ω convexe, $a_1, ..., a_n$ des points distincts de Ω, et f holomorphe sur $\Omega \setminus \{a_1, ..., a_n\}$. On suppose que f admet un pôle en chaque a_i, et on se donne un chemin fermé γ ne passant pas par les a_i. Alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z).dz = \sum_{k=1}^{n} Res(f;a_k).Ind_\gamma(a_k)$$

Démonstration *On applique le théorème de Cauchy à la fonction f* moins *ses parties principales en les a_i ; l'intégrale de cette fonction est donc nulle. Il ne reste alors qu'à considérer l'intégrale des parties principales, ce qui est facile au vu de résultats antérieurs (voir le théorème 0.15, et le fait que x^n pour $n \neq -1$ a une primitive holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$).*

Théorème 0.28

•Si f est holomorphe et admet un zéro d'ordre m en a, alors le résidu de f'/f en a est m.

•Si f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$, alors le résidu de f'/f en a est égal à $-m$.

Démonstration *Pas dur ; il suffit de réécrire la fonction soit en divisant par $(z-a)^m$ (premier •), soit en soustrayant la partie principale du pôle (second •).*

Théorème 0.29

Soit f une fonction holomorphe, et γ un chemin $\theta \mapsto a + re^{i\theta}$, avec $\overline{D}(a,r)$ inclus dans Ω.

On définit $\Gamma = f \circ \gamma$. Soit w n'appartenant pas à Γ^*.

Alors le nombre de zéros de $f - w$ dans $D(a, r)$, comptés avec leurs ordres de multiplicité, est égal à l'indice de w par rapport à Γ.

Démonstration *Le nombre de zéros de $f-w$ dans $D(a,r)$ est égal à la somme des résidus de $f'/(f-w)$ dans $D(a,r)$, et cette somme est bien l'indice de w par rapport à Γ.*

THÉORÈME 0.30 **Théorème de l'image ouverte**

On se donne Ω un ouvert connexe, i.e. un domaine, et f holomorphe sur Ω. Alors si f n'est pas constante, et pour tout z_0 dans Ω, f induit sur un voisinage ouvert V de z_0 une application surjective de V sur un ouvert W, telle que pour tout w dans $W \setminus \{w_0 = f(z_0)\}$, il y ait exactement m points distincts $z \in V$ dont l'image par f est w, avec m l'ordre du zéro de $f - w_0$ en z_0.

Démonstration

•on considère un cercle orienté suffisamment petit autour de w_0 pour que le disque D de même centre et de même rayon ne comporte pas de zéro ni de $f - w_0$ ni de f' dedans, à part z_0 lui-même.

•on considère le contour de ce cercle suffisamment petit

•on considère l'image par f de ce contour, et la composante connexe W de w_0 dans le complémentaire de cette image (W est ouvert comme composante connexe d'un ouvert, le complémentaire de l'image d'un compact étant évidemment ouvert puisque complémentaire d'un compact (rappelons que l'image d'un compact par une application continue est un compact)).

•on prend alors pour V l'intersection du disque ouvert D et de l'image réciproque de W.

•L'indice de w_0 par rapport à $\Gamma = f \circ \gamma$ est m, ainsi donc que l'indice de tout w dans V. D'où le résultat...

Remarquons un corollaire intéressant, qui donne son nom à ce théorème ; l'image de tout ouvert par une fonction holomorphe est un ouvert.

Il est clair au vu du théorème précédent que si l'on a $f'(z)$ non nul, avec f holomorphe, alors on a localement une bijection autour de z. On peut améliorer ce résultat ; la réciproque locale, est elle aussi holomorphe ; cela fait l'objet du théorème suivant.

THÉORÈME 0.31

Soit f holomorphe, f de dérivée non nulle en a alors on peut trouver un ouvert V contenant a tel que f induise une bijection de V sur $f(V)$; la réciproque de f est holomorphe sur $f(V)$.

Démonstration *Tout ce qui reste à prouver est le caractère holomorphe de la réciproque g de f sur $f(V)$.*

Pour cela on considère $\frac{g(z)-g(a)}{z-a}$, on utilise la continuité de g (qui découle du fait que f est une application ouverte, i.e. que l'image de tout ouvert par une fonction holomorphe est une fonction holomorphe), et le fait que $f'(a)$ est non nul, et tout ça coule de source...

On va maintenant montrer que l'on a le droit de modifier "un peu" une courbe sans changer l'indice d'un point par rapport à cette courbe.

Théorème 0.32

Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins d'intervalle de paramétrage $[0,1]$ et si pour tout $t \in [0,1]$ on a $|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)|$, alors $Ind_{\gamma_1}(0) = Ind_{\gamma_2}(0)$.

Démonstration

•*On pose* $\gamma = \gamma_2/\gamma_1$.

•*On a alors* $\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\gamma_2'}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1'}{\gamma_1}$, *donc en intégrant sur* $[0,1]$ *on déduit que la différence entre l'indice de* 0 *par rapport à* γ_2 *et l'indice de* 0 *par rapport à* γ_1 *est l'indice de* 0 *par rapport à* γ.

•$|1 - \gamma(t)| < 1$ *; donc l'indice de* 0 *par rapport à* γ *est* 0.

Corollaire 0.33 **Théorème de Rouché**

f et g holomorphes sur Ω, le disque fermé de centre a et de rayon r étant inclus dans Ω, et $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ sur le cercle de centre a et de rayon r. Alors f et g ont le même nombre de zéros sur le disque ouvert de centre a et de rayon r (en comptant leurs multiplicités).

Démonstration *On considère* $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$, *et* $\gamma_1 = f \circ \gamma$ *et* $\gamma_2 = g \circ \gamma$. *On applique alors le théorème précédent.*

Application 0.13 Cela servira notamment pour montrer le théorème 0.38. Ainsi que le rappelle Rudin dans [2], on peut aussi utiliser ce résultat pour montrer que tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré $n \geq 1$ a n racines [2] dans $\mathbb{C}$ (en montrant que tout polynôme de degré n a le même nombre de zéros que z^n, dans un disque de rayon suffisamment grand).

1.11.3 Topologie de $H(\Omega)$

La topologie de $H(\Omega)$ est précisée en section **??**.

Lemme 0.34

Soit K un compact de $\mathbb{C}$, inclus dans un ouvert Ω. Alors il existe $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_n$ des segments orientés dans $\Omega \setminus K$ tels que pour toute fonction holomorphe f sur Ω et pour tout k dans K

Approximation de fonctions holomorphes par des fractions rationnelles

Démonstration

On aura besoin pour cette démonstration du lemme qui suit :

Lemme 0.35 ***Intuitif pour les topologistes***

Il existe $\eta > 0$ *tel que la distance entre un point* k *de* K *à un point du complémentaire de* Ω *soit toujours* $> \eta$.

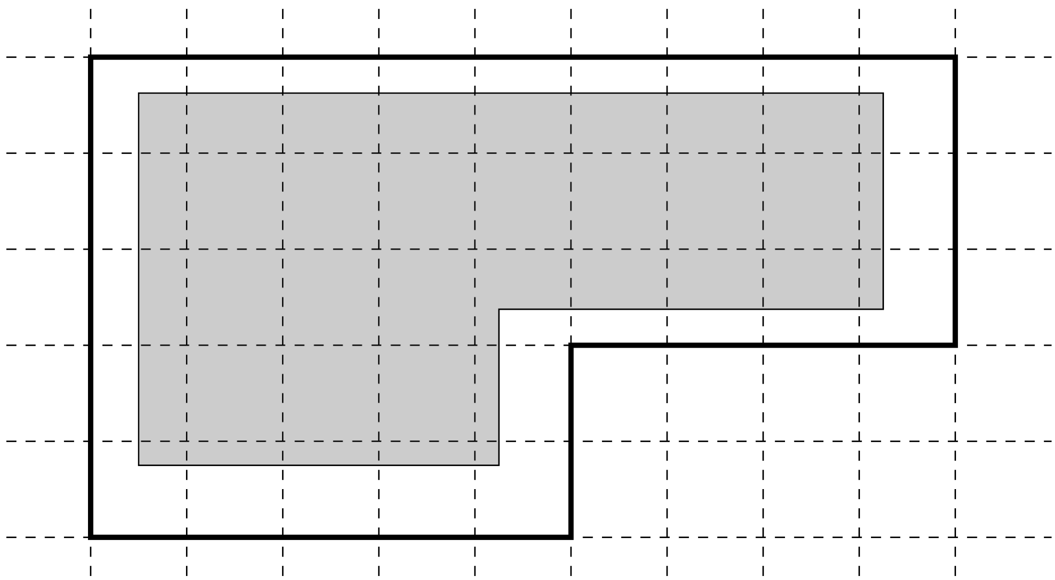
2. En comptant les multiplicités des racines, on a exactement n racines.

begindivdemonstrationbegintext endtext

- *Supposons le contraire. Alors, on peut construire une suite de points $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K à distance $\leq 1/n$ de $X \setminus K$.*
- *On pourrait alors extraire une suite convergente (par le théorème de Bolzano-Weierstrass* **??***, puisque $\mathbb{C}$ est muni d'une topologie métrique !), et le point limite serait à une distance* 0 *du fermé complémentaire de Ω, et serait donc dans K sans être dans Ω, ce qui est contradictoire.*

Nous allons utiliser le η ainsi construit dans la démonstration du lemme 0.34 :

- On construit une grille recouvrant le compact K, avec un maillage inférieur à $\eta/2$, comme indiqué sur la figure **??**. Cette grille est donc faite de carrés.



- On considère alors les contours γ_1, ..., γ_{4p}, orientés positivement, des carrés $C_1, ..., C_p$ intersectant K.
- On conserve alors seulement les segments des contours qui ne sont parcourus qu'une fois (les autres étant parcourus deux fois, une fois dans chaque sens).
- On note ces segments orientés Γ_1, ..., Γ_n.
- On se donne alors f holomorphe sur Ω, et z à l'intérieur de l'un des carrés du maillage, $z \in K$. La fonction g qui à t appartenant à la réunion des γ_l associe $\frac{f(t)-f(z)}{t-z}$ est continue.
- On calcule alors
$$\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_l} \frac{g(t)}{t-z} dt$$
- Cette somme est égale à
$$\sum_{l=1}^{p} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_l} \frac{g(t)}{t-z} dt$$

— Par le lemme 0.16, étendu au cas d'un carré, on en déduit que cette somme est nulle.
— Donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_l} \frac{f(t)}{t-z} dt \\
&= \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_l} \frac{f(z)}{t-z} dt \\
&= f(z) \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_l} \frac{1}{t-z} dt \\
&= f(z)
\end{aligned}$$

— Il ne reste qu'à prolonger par continuité pour avoir le résultat souhaité.

enddivdemonstration

Théorème 0.36 Runge, version faible, lemme pour la version forte

Soit K un compact de $\mathbb{C}$, inclus dans un ouvert Ω.

Soit Z une partie de $\mathbb{C}$ contenant au moins un point dans chaque composante connexe de $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K$.

Alors l'ensemble des fractions rationnelles dont les pôles sont inclus dans Z est dense dans l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω, pour la topologie de la convergence uniforme sur K.

Démonstration

•*Soit FR l'ensemble des fractions rationnelles dont les zéros sont inclus dans Z.*

•*D'après le corollaire* **??***, il suffit de montrer que toute forme linéaire continue nulle sur toutes les fractions rationnelles de FR est nulle sur toute application holomorphe sur Ω.*

•*D'après le théorème de représentation de Riesz* **??***, il nous suffit donc de montrer qu'étant donnée une mesure de Borel complexe μ sur K telle que l'intégrale pour μ sur K de tout élément de FR soit nulle, l'intégrale sur K pour μ de f holomorphe est nulle.*

•*Soit donc une telle mesure complexe μ, et f holomorphe sur Ω.*

•*Définissons, pour $t \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K$,*

$$h(t) = \int_K \frac{d\mu(k)}{k-t}$$

•*h est holomorphe, au vu de la proposition 0.14.*

•*Soit z dans Z et n'appartenant pas à K ; notons V_z la composante connexe de $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K$ contenant z. On va montrer que h est nulle sur cette composante connexe ; pour cela, par le théorème 0.21, il sera suffisant de montrer que h est nulle sur un voisinage de z.*

– Supposons tout d'abord $z = \infty$. L'objectif est donc de montrer que pour t assez grand en module, $h(t) = 0$.

Écrivons, pour k dans K et t quelconque,

$$\frac{1}{k-t} = -\frac{1}{t}\frac{1}{1-k/t} = -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{k^l}{t^{l+1}}$$

La convergence étant uniforme en k pour t suffisamment grand, on peut alors intervertir l'intégrale et la somme dans l'équation 32 et on obtient bien $h(t) = 0$.

– Supposons maintenant que $z \neq \infty$

Écrivons, pour k dans K et t quelconque,

$$\frac{1}{k-t} = \frac{1}{(k-z)-(t-z)} = \frac{1}{k-z} \times \frac{1}{1-\frac{t-z}{k-z}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(t-z)^l}{(k-z)^{l+1}}.$$

La convergence étant uniforme en k pour t suffisamment proche de z, on peut alors intervertir l'intégrale et la somme dans l'équation (32) et on obtient bien $h(t) = 0$.

•On applique alors le lemme 0.34, pour pouvoir exprimer f comme une intégrale sur un contour hors de K :

$$\int_K f d\mu = \int_K \frac{1}{2i\pi} \sum_l \int_{\Gamma_l} \frac{f(t)}{t-k} dt \; d\mu(k)$$

*Et par le théorème Fubini **??**,*

$$= \frac{1}{2i\pi} \sum_l \int_{\Gamma_l} f(t) \int_K \frac{1}{t-k} d\mu(k) \; dt$$

$$= -\frac{1}{2i\pi} \sum_l \int_{\Gamma_l} f(t)h(t)dt$$

$$= 0,$$

d'où le résultat tant attendu !

On peut facilement passer à la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

En outre, le cas où K est simplement connexe (i.e. son complémentaire a une seule composante connexe) donne lieu à un corollaire important.

C$\backslash\Omega$, alors f est dans l'adhérence de l'ensemble des fractions rationelles à pôles dans Z pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

•Si f est une fonction holomorphe définie sur un ouvert simplement connexe Ω, alors il existe une suite de polynômes convergeant uniformément vers f sur tout compact.

> COROLLAIRE 0.37
> Deux corollaire importants :
> •Si f est une fonction holomorphe définie sur un ouvert Ω, si Z est un ensemble contenant au moins un point dans chaque composante connexe de ˆ

Démonstration

*•On définit les K_n comme dans le lemme **??**, et on définit F_n comme étant une fraction rationnelle tel que $|f(z) - F_n(z)| \leq 1/n$ pour z dans K_n.*

•Dans le deuxième cas, on peut simplement imposer $Z = \{\infty\}$, et on obtient bien une suite de polynômes.

1.11.4 Zoologie des applications holomorphes

On étudiera ici le théorème de Montel sur le nombre de zéros des fonctions holomorphes, la non-majoration de fonctions holomorphes par des polynômes, les limites en l'infini de fonctions holomorphes.

THÉORÈME 0.38 **Théorème de Montel**

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, K compact de Ω, $M \geq 0$, $m > 0$, $k \in K$. Alors il existe un certain $NombreMaxDeZeros$ tels que le nombre de zéros de f dans K, pour f holomorphe bornée[3] par M sur K et telle que $|f'(k)| \geq m$, est majoré par $NombreMaxDeZeros$.

Théorème de Montel

Démonstration

•On considère l'ensemble U_n des applications f holomorphes sur Ω telles que le nombre de zéros de f sur K soit $< n$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) ; on montre que U_n est ouvert.

– Pour cela donnons-nous f dans U_n

– Soit $NombreZeros$ le nombre de zéros de f dans K. $NombreZeros$, par définition de U_n, est fini.

– Considérons les disques fermés $\overline{D}(z_i, \epsilon_i)$ inclus dans Ω, et tels que f ne s'annule pas sur le disque ouvert, sauf peut-être en z_i.

– Il est clair que les disques ouverts $D(z_i, \epsilon_i)$ recouvrent K.

– On en extrait un nombre fini. Les $D(z_i, \epsilon_i)$ pour $i \in I$, avec I fini, recouvrent donc K.

– On considère alors $LesCercles$ le compact constitué des cercles de rayon ϵ_i et de centre les z_i pour i dans I.

– On considère alors η l'inf de f sur $LesCercles$.

– On considère alors l'ensemble V des fonctions g telles que $sup_{LesCercles}|g - f|$ est inférieur strictement à η. Par le théorème de Rouché 0.33, les fonctions g dans V ont un nombre de 0 égal au nombre de zéros de f.

– Le résultat est ainsi prouvé.

•On en déduit donc que l'application qui à f associe son nombre de zéros sur K est semi-continue supérieurement.

•L'ensemble $\mathcal{F}$ des applications f bornées en module par M sur K et telles que $|f'(k)| \geq m$ étant compact, le nombre de zéros est borné, le maximum est atteint (car une application semi-continue supérieurement sur un compact atteint son maximum, voir proposition **??***), et il n'est pas infini par la condition $|f'(k)| \geq m$.*

THÉORÈME 0.39

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, et P un polynôme, avec $|f| \leq |P|$. Alors f est un polynôme, de degré $\leq$ au degré de P.

Fonctions holomorphes majorées par un polynôme

Démonstration

Il suffit d'utiliser le théorème 0.25, qui nous dit que

$$|f^{(n)}(0)| \leq n!M/R^n$$

avec M un majorant de $|f|$ sur le disque de centre 0 et de rayon R. Puisque $M \leq L + K \times R^p$ (par hypothèse), on en déduit :

$$|f^{(n)}(0)| \leq n!(L + K \times R^p)/R^n$$

et donc $f^{(n)} = 0$ pour $n > p$, d'où le résultat.

THÉORÈME 0.40

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On suppose

$$lim_{|z|\to\infty}|f(z)| = \infty$$

Alors f est une fonction polynôme.

Fonctions holomorphes tendant vers l'infini en l'infini

Démonstration

•*Soit Z l'ensemble des zéros de f.*

•*Au vu de l'hypothèse, pour z assez grand en module, $|f(z)| \geq 1$. Donc Z est inclus dans un compact K.*

•*Si Z est infini, alors Z possède un point d'accumulation dans K, et donc d'après le théorème 0.21 f est nulle. Ce cas étant résolu, on peut supposer Z fini.*

•*On considère alors $1/f$. C'est une fonction holomorphe sur le complémentaire de Z. Sur Z, en utilisant le théorème 0.21, on constate que $1/f$ admet des pôles, et non pas des singularités essentielles ; on peut donc lui soustraire une fraction rationnelle P/Q, afin que $1/f - P/Q$ soit holomorphe.*

•*$1/f - P/Q$ est majoré par un polynôme, donc d'après le théorème 0.39 c'est un polynôme.*

•*$1/f - P/Q = R$, avec R un polynôme, donc f est une fraction rationnelle.*

•*f étant holomorphe, f n'a pas de pôle, et donc se simplifie en un polynôme.*

Références

[1] W. Giorgi, *Thèmes mathématiques pour l'agrégation*, Masson, 1998.

[2] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson 1992.