Interversions

Christophe Antonini[1], Pierre Borgnat[2], Annie Chateau[3], and Edouard Lebeau[4]

[1]Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes
[2]Chargé de recherche CNRS, ENS Lyon, Lyon
[3]Maitre de conférence, Université Montpellier-2, Montpellier
[4]Enseignant en CPGE, Lycée Henri Poincaré, Nancy

9 juillet 2022

Interversions de symboles.

1 Interversions

La hantise classique du mathématicien est de justifier les permutations entre sommes, intégrales, limites, dérivation. L'objectif de cette partie est de fournir tous les outils (ou presque) pour affronter cette tâche...

1.1 Interversion de limites et de dérivation

Pour cela, on consultera la partie **??**, ainsi que la section **??** quant à la dérivation de séries entières.

1.2 Interversion de limites et de limites

Il s'agit bien sûr d'intervertir une limite au sens d'un espace de fonctions avec une limite au sens de l'espace sur lequel sont définies ces fonctions... Formellement ça donne ça :

Théorème 0.1

Soit X un espace topologique, A une partie de X, a un point de l'adhérence de A.

Soit (E, d) un espace métrique, et enfin soit (f_n) une suite d'applications de A dans E, et f une application de A de E.

Supposons que :

$\bullet lim_{x \to a} f_n(x) = e_n$
$\bullet f_n$ converge uniformément vers f sur A
$\bullet E$ est complet
Alors il existe un certain e limite de e_n et $lim_{x \to a} f(x) = e$

Démonstration

$\bullet$On considère $\tilde{f}_n$ la fonction égale à f_n sur A et prolongée par continuité en a en posant $\tilde{f}_n(a) = e_n$; $\tilde{f}_n$ est donc continue en a.

$\bullet$On se donne $\epsilon > 0$.

$\bullet$La convergence des f_n étant uniforme, on peut trouver N tel que

$$n, m > N \Rightarrow \forall x, d(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon$$

$\bullet$On passe à la limite pour $x \to a$ et on obtient

$$n, m > N \Rightarrow d(e_n, e_m) \leq \epsilon$$

(ceci implique que la suite (e_n) est de Cauchy, donc par complétude de E qu'elle a une certaine limite e)

$\bullet$La convergence de $\tilde{f}_n$ est donc uniforme (par le critère de Cauchy pour la norme uniforme) (voir **??***)*

$\bullet$Les $\tilde{f}_n$ étant continues en a, leur limite (uniforme) est donc continue en a (voir proposition **??***) ; d'où le résultat.*

Corollaire 0.2

Soit f_n des fonctions continues admettant une limite e_n en $a \in \overline{A}$, à valeurs dans E espace de Banach, telles que la série des f_n converge normalement (pour la norme infinie $\|.\|_\infty$) vers f.

Alors la série de terme général e_n converge vers un certain e, et f tend vers e en a.

Démonstration *C'est exactement la même propriété, dans le cas des séries...*

1.3 Interversion d'une limite et d'une intégrale

Définition 0.1 **Application réglée**

Une application de $\mathbb{R}$ dans un espace topologique est dite **réglée** si et seulement si elle admet une limite à droite et une limite à gauche en tout point.

Attention On ne demande pas du tout que la limite à droite soit égale à la limite à gauche, ni qu'aucune de ces deux limites soit égale à la valeur de l'application en ce point.

Remarque Les applications réglées ont été définies en parties **??** (sur l'intégrale de Riemann) comme les éléments de l'adhérence de l'ensemble des fonction en escalier (adhérence pour la norme $\|.\|_\infty$). Ces deux définitions sont équivalentes, pour peu que X soit métrique.

Théorème 0.3

On se donne E un espace de Banach, et (f_n) une suite d'applications réglées du segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans E convergeant uniformément vers f.

Alors f est réglée et $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \lim_n \int_{[a,b]} f_n$.

Démonstration *Le fait que f soit réglée est un corollaire immédiat du théorème 0.1 (interversion des limites de suites et de fonctions sous certaines hypothèses).*

Pour conclure il suffit d'observer que $|\int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} f_n| \leq \int_{[a,b]} |f - f_n| \leq (b-a)\|f - f_n\|_\infty$.

Corollaire 0.4

Si $\sum f_n$ converge normalement (pour la norme $\|.\|_\infty$), de $[a, b]$ segment de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E, et si les f_n sont réglées, alors la somme des f_n est une fonction f réglée, d'intégrale la somme des intégrales des f_n.

Démonstration *C'est exactement la même propriété, dans le cas des séries.*

Références