Fonctions usuelles

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 décembre 2021

1 Fonctions usuelles

Nous commençons ce chapitre par quelques généralités sur les fonctions. Nous introduisons en particulier les notions de monotonie, de parité et de périodicité. Puis nous effectuons quelques rappels d'analyse du lycée. Nous expliquons sans la formaliser la notion de limite puis celles de continuité et de dérivabilité. Nous terminons cette section par un paragraphe sur l'intégration. Nous ne proposons aucune preuve, il est trop tôt pour cela, elles viendront plus tard dans l'année. L'idée est d'introduire les outils de base en analyse afin de pouvoir en disposer dés le début d'année et de préparer ainsi les chapitres ultérieurs dans lesquels ces notions seront approfondies.

Nous continuons ce chapitre en introduisant les différentes fonctions usuelles en classe préparatoire. Aux fonctions logarithme, exponentielle, puissances et trigonométriques connues depuis le lycée s'ajouteront les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques. Nous aborderons aussi une nouvelle famille de fonctions, les fonctions hyperboliques.

Pour bien aborder ce chapitre

> Our federal income tax law defines the tax y to be paid in terms of the income x ; it does so in a clumsy enough way by pasting several linear functions together, each valid in another interval or bracket of income. An archeologist who, five thousand years from now, shall unearth some of our income tax returns together with relics of engineering works and mathematical books, will probably date them a couple of centuries earlier, certainly before Galileo and Vieta.
>
> Weyl, Hermann ; The mathematical way of thinking

L'objet de ce chapitre est d'introduire les différentes fonctions utilisées de manière usuelles en classe prépa. Aux fonctions logarithme, exponentielle et trigonométriques connues depuis le lycée s'ajouteront les fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque, les fonctions puissances ainsi que les réciproques des fonctions trigonométriques. Nous introduirons aussi une nouvelle famille de fonctions : les fonctions hyperboliques (qui sont à l'hyperbole équilatère ce que les fonctions trigonométriques sont au cercle unité) ainsi que leurs réciproques.

Nous utiliserons à plusieurs reprises dans ce chapitre des théorèmes qui ne seront énoncés et démontrés que beaucoup plus tard dans l'année. Parmi ces théorèmes, notons les trois suivants :

THÉORÈME 0.1 **Théorème de la bijection**
Soit I un intervalle et soit une application $f : I \to \mathbb{R}$. On note $J = f(I)$. On suppose que la fonction f est

1. continue sur I.
2. strictement monotone sur I.

alors la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J et sa bijection réciproque f^{-1} est une fonction *continue* et strictement monotone sur J de même sens que f.

THÉORÈME 0.2 **Dérivation de la bijection réciproque**
Soit $f : I \to R$. On suppose que :

1. f est strictement monotone sur l'intervalle I.
2. f est dérivable sur I.
3. $\forall x \in I, \quad f'(x) \neq 0$

alors f réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$ et son application réciproque, f^{-1} est dérivable sur J et

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}}$$

THÉORÈME 0.3 **La dérivée d'une fonction est identiquement nulle sur un intervalle et seulement si cette fonction est constante sur cet intervalle**
Soit $f : I \to R$. On suppose que :

1. f est dérivable sur un intervalle I.

alors la fonction f est constante si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

On retrouvera le premier théorème et sa démonstration en **??** page **??** et le second en **??** page **??**. Le troisième sera établi en **??** page **??**.

Multimédia : Traceur de courbe réciproque : on donne le graphe d'une fonction. On pointe sur un point du graphe et on obtient son symétrique par rapport à la bissectrice principale. On affiche le vecteur tangent en ce point au graphe initial et on obtient le vecteur tangent au graphe de la réciproque correspondant. En cliquant sur un bouton, on affiche le graphe entier de la réciproque.

1.1 Fonctions logarithmes, exponentielles et puissances

1.1.1 Logarithme népérien

Nous verrons au chapitre **??** dans le théorème **??** page **??** que toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ possède une primitive sur cet intervalle (voir **??**). La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ admet donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourrait montrer, mais c'est difficile, que l'on ne peut exprimer cette primitive avec des fonctions usuelles (fonctions polynomiales, fractions rationnelles, fonctions trigonométriques). Il faut donc introduire une nouvelle fonction.

DÉFINITION 0.1 **Logarithme népérien**
On appelle *logarithme népérien* et on note ln l'unique primitive s'annulant en 1 de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$: $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

$$\boxed{\ln : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}x \\ \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{dt}}{t} & \end{array} \right.}$$

Remarque 0.1 $ln(1) = 0$

THÉORÈME 0.4 **Propriétés de la fonction** ln

— La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

— La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln' x = \dfrac{1}{x}}$.

— La fonction ln est même $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui signifie qu'elle est dérivable et que toutes ses dérivées sont dérivables.

— La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$

Démonstration *Les primitives d'une fonction sont, par définition, dérivables. La fonction* ln *est donc dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Une fonction est continue là où elle est dérivable (voir la proposition* **??** *page* **??***). Donc* ln *est dérivable et par suite continue sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Sa dérivée, qui est la fonction* $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *donc il en est de même de* ln. *Comme la dérivée* f *de* ln *est une fonction strictement positive,* ln *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Enfin, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = -1/x^2$ *est strictement négative sur* $\mathbb{R}_+^*$ *donc* ln *est concave. Vous pouvez consulter le paragraphe* **??** *page* **??** *qui traite de ce sujet.*

COROLLAIRE 0.5
Soient I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction dérivable. La fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I de dérivée, pour tout $x \in I$: $\boxed{(\ln u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}}$

Démonstration *C'est une conséquence directe du théorème de composition des fonctions dérivables.*

Proposition 0.6 Propriétés algébriques du logarithme

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$

1. $\boxed{\ln(xy) = \ln x + \ln y}$
2. $\boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x}$
3. $\boxed{\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y}$
4. $\boxed{\ln(x^n) = n \ln x}$

Démonstration ★

1. *La méthode pour prouver cette égalité est classique, il faut la retenir. Fixons $y \in \mathbb{R}_+^*$ et notons θ_y la fonction*

$$\theta_y : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}x \\ \longmapsto & \ln(xy) - \ln x - \ln y \end{cases}.$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et différence de fonctions dérivables. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \theta_y'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0.$$

D'après le théorème 0.3, θ_y est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \theta_y(x) = c$. Déterminons cette constante. $c = \theta_y(1) = \ln y - \ln 1 - \ln y = 0$. Ce qui prouve que, pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, $\theta_p(x) = \ln(xy) - \ln x + \ln y = 0$.

2. *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par application de la proposition précédente, on a les égalités*

$$0 = \ln 1 = \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln\left(x.\frac{1}{x}\right) = \ln x + \ln\frac{1}{x}.$$

desquelles découlent le résultat.

3. *Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, par application des deux dernières égalités*

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x.\frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln\frac{1}{y} = \ln x - \ln y.$$

4. *Par récurrence.*

Proposition 0.7 Limites aux bornes du domaine de définition

$$\ln x \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty \quad \text{et} \quad \ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

Démonstration ★

— *La fonction ln est strictement croissante et $\ln 1 = 0$, donc $\ln 2 > 0$. D'après la dernière égalité de la proposition précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $\ln(2^n) = n \ln 2$. On en déduit que $\ln(2^n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. La fonction $\ln$ n'est donc pas majorée. Comme elle est strictement croissante, on peut affirmer, par application du théorème de la limite monotone* **??**, *que $\ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.*

— *Par application du théorème d'opérations sur les limites et par utilisation de la limite précédente,*

$$\ln x = -\ln \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty.$$

DÉFINITION 0.2 **Nombre de Néper**
On appelle *nombre de Néper* l'unique réel e vérifiant $\ln e = 1$.

Démonstration *L'existence du nombre de Néper est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires qui sera vu dans le chapitre* **??**. *L'unicité est une conséquence directe de la stricte monotonie de* $\ln$.

PROPOSITION 0.8 **Limites usuelles pour** $\ln$

— « $\ln x$ est négligeable devant x quand x tend vers $+\infty$ » : $\boxed{\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$.

— « $\ln x$ est négligeable devant $\frac{1}{x}$ quand x tend vers 0 » : $\boxed{x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0}$.

Démonstration

— *Pour tout* $t \geqslant 1$, *on a* $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$. *Fixons* $x \geqslant 1$. *Il vient que* $\int_1^x \frac{dt}{t} \leqslant \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}}$ *ce qui s'écrit aussi* $\ln x \leqslant 2\left(\sqrt{x}-1\right) \leqslant 2\sqrt{x}$. *Divisant cette inégalité par* x, *on obtient* $0 \leqslant \frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$ *ce qui amène, par application du théorème des gendarmes* **??**, $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

— *Par ailleurs :* $X\ln X \overset{x=1/X}{=\!=\!=} -\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$.

PROPOSITION 0.9 **Limites usuelles pour** $\ln$

— « La fonction ln est dérivable en 1 et $\ln' 1 = 1$ »$\boxed{\frac{\ln(x)}{x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} 1}$.

— Cette limite s'écrit aussi sous la forme $\boxed{\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1}$.

Démonstration

— *Le taux d'accroissement de* $\ln$ *en* 1 *est donné par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \quad \Delta(x) = \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \frac{\ln x}{x-1}.$$

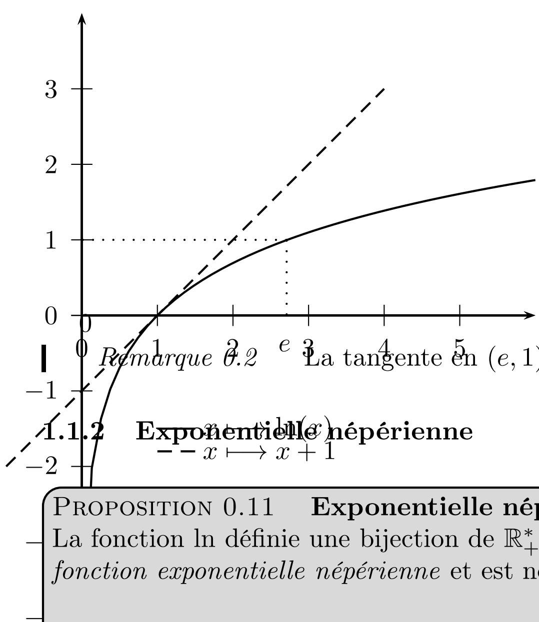
Comme $\ln$ *est dérivable en* $x=1$ *et que* $\ln' 1 = \frac{1}{1} = 1$, *on a bien* $\lim_{x\to 0} \Delta(x) = 1$.

— *La seconde égalité se prouve grâce à un changement de variable :* $\dfrac{\ln(x)}{x-1} \overset{X=x-1}{=\!=\!=} \dfrac{\ln(1+X)}{X} \xrightarrow[X\to 0]{}$ 1

Proposition 0.10 — Inégalité de convexité

$$\boxed{\forall x \in \left]-1,+\infty\right[, \quad \ln(1+x) \leqslant x}$$

Démonstration ★ *Il suffit d'étudier le signe de la fonction* $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \left]-1,+\infty\right[& \longrightarrow & \mathbb{R}x \\ \longmapsto & \ln(1+x)-x \end{array} \right.$



Remarque 0.2 La tangente en $(e,1)$ passe par l'origine du repère.

1.1.2 Exponentielle népérienne

Proposition 0.11 — Exponentielle népérienne

La fonction ln définie une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur son image $\mathbb{R}$. L'application réciproque est appelée *fonction exponentielle népérienne* et est notée *exp*.

$$\exp : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ y & \longmapsto & \exp y \end{array} \right.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \boxed{\exp(\ln x) = x}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\ln(\exp y) = y}$$

La fonction exp

— est strictement croissante et strictement positive.

— est continue $\mathbb{R}$.

— est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\exp'(x) = \exp(x)}$.

— est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline & & & & & +\infty \\ \exp & & \nearrow & 1 & \nearrow & \\ & 0 & & & & \end{array}$$

Démonstration ★ *Posons $f = \ln$. La fonction f est :*

1. *dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.*
2. *de dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$*
3. *donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$*

Par application du théorème de la bijection 0.2, on peut affirmer que f est bijective et que sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. De plus si $y_0 \in \mathbb{R}$

$$f'^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)} = \frac{1}{\frac{1}{f^{-1}(y_0)}} = f^{-1}(y_0)$$

Notons $\exp$ la fonction f^{-1}, nous venons de montrer que $\exp'(y_0) = \exp(y_0)$. Il est alors clair que $\exp$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

De plus, comme $\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$, on a $\exp x \xrightarrow[x\to -\infty]{} 0$ et comme $\ln x \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$, on a $\exp x \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$.

Remarque 0.3 $\exp 0 = 1$ et $\exp 1 = e$

PROPOSITION 0.12 **Propriétés algébriques de la fonction exponentielle**

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$

1. $\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)}$
2. $\boxed{\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}}$
3. $\boxed{\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}}$
4. $\boxed{\exp(nx) = (\exp(x))^n}$

Démonstration ★ *Démontrons la première affirmation. Les autres se prouvent de même. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Comme $\exp$ est la bijection réciproque de $\ln$, il existe $x', y' \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\ln(x') = x$ et $\ln(y') = y$. On peut alors écrire*

$$\exp(x+y) = \exp\left(\ln x' + \ln y'\right) = \exp\left(\ln\left(x'y'\right)\right) = x'y' = \exp(x)\exp(y').$$

✎ *Notation 0.1* D'après la formule 4, $\exp(n) = \exp(1.n) = e^n$, on conviendra de noter pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \exp(x)$.

PROPOSITION 0.13 **1**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\exp x \geqslant 1 + x}$$

Démonstration ★ *Il suffit d'étudier le signe de la fonction*

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}x \\ \longmapsto & \exp x - (x+1) & \end{array} \right.$$

PROPOSITION 0.14 **Limites usuelles pour** exp

— « $\exp x$ est prépondérant devant x quand x tend vers $+\infty$ » : $\boxed{\dfrac{\exp x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty}$.

— « $\exp x$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x}$ quand x tend vers $-\infty$ » : $\boxed{x \exp x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0}$.

— « $\exp x$ est dérivable en $x = 0$ de dérivée égale à 1 » : $\boxed{\dfrac{\exp x - 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1}$.

Démonstration ★

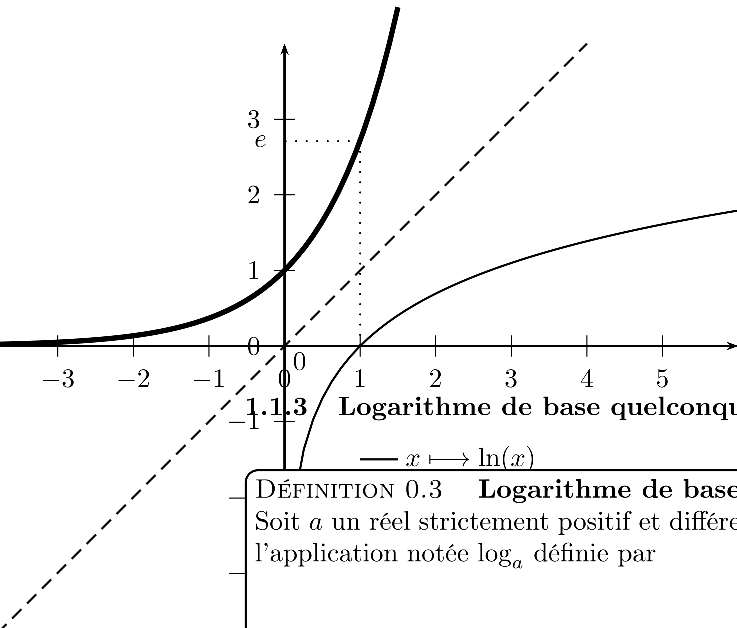
— *Comme* $\frac{\exp x}{x} \overset{x = \ln X}{=\!=\!=} \frac{X}{\ln X} = \frac{1}{\frac{\ln X}{X}}$, *il vient* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{x} = \lim\limits_{X \to 0^+} \frac{1}{\frac{\ln X}{X}} = +\infty$.

— *La seconde limite se démontre de la même façon.*

— *Écrivons le taux d'accroissement* Δ *de* exp *en* 0. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$

$$\Delta(x) = \frac{\exp x - \exp 0}{x - 0} = \frac{\exp x - 1}{x}.$$

Comme exp *est dérivable en* 0 *et que* $exp'(0) = \exp(0) = 1$, $\Delta(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ *et la dernière limite est prouvée.*



1.1.3 Logarithme de base quelconque

DÉFINITION 0.3 Logarithme de base a
Soit a un réel strictement positif et différent de 1 : $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle *logarithme de base a* l'application notée $\log_a$ définie par

$$\log_a x : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \quad \mathbb{R}x \\ \longmapsto & \dfrac{\ln x}{\ln a} \end{cases}$$

Remarque 0.4

— Si $a = 10$, on obtient le *logarithme décimal* qu'on note *log*.

— Si $a = e$, $\log_a = \ln$.

— $\log_a 1 = 0$ et $\log_a a = 1$.

PROPOSITION 0.15
Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$..

1. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a \left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a x$
3. $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
4. $\log_a x^n = n \log_a x$

Démonstration *Ces différentes égalités se démontrent en revenant à la définition de $\log_a$ et en utilisant les propriétés du logarithme néperien.*

PROPOSITION 0.16
Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction $\log_a$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \log_a'(x) = \frac{1}{x \ln a}}$$

— Si $a \in]1;+\infty[$, $\log_a$ est strictement croissante et concave.
— Si $a \in]0;1[$, $\log_a$ est strictement décroissante et convexe.

Démonstration *Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La fonction $\log_a$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\log_a'(x) = 1/(x \ln a)$ et $\log_a''(x) = -1/\left(x^2 \ln a\right)$.*

- *Si $a \in]1;+\infty[$, alors $\ln a > 0$, $\log_a'$ est donc strictement positive et $\log_a''$ est strictement négative. Donc $\log_a$ est strictement croissante et concave.*
- *Si $a \in]0;1[$, alors $\ln a < 0$, $\log_a'$ est donc strictement négative et $\log_a''$ est strictement positive. Donc $\log_a$ est strictement décroissante et convexe.*

1.1.4 Exponentielle de base a

PROPOSITION 0.17 **Exponentielle de base a**
Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La fonction $\log_a$ définie une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On appelle *exponentielle de base a* et on note $\exp_a$, la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ comme application réciproque de $\log_a$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exp_a(\ln_a x) = x \forall y \in \mathbb{R}, \quad \ln_a(\exp_a y) = y$$

De plus, $\exp_a'$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a'(x) = \ln a \exp_a(x)$$

Démonstration *Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Posons $f = \log_a$. La fonction f*

1. *est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.*
2. *possède une dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ strictement positive si $a \in]1;+\infty[$ et strictement négative si $a \in]0;1[$*
3. *et est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ si $a \in]1;+\infty[$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ si $a \in]0;1[$.*

Par application du théorème de la bijection 0.2, on peut affirmer que f possède une bijection réciproque f^{-1} dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. De plus si $y_0 \in \mathbb{R}$

$$f'^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{\frac{1}{\ln a f^{-1}(y_0)}} = \ln a f^{-1}(y_0).$$

Notant $\exp_a$ la fonction f^{-1}, on vient de montrer que : $\exp_a'(y_0) = \ln a \exp_a(y_0)$. Il est alors clair que $\exp_a$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 0.18
Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On a

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exp_a(y) = \exp(y \ln(a))}.$$

Démonstration *Soit $y \in \mathbb{R}$. Posons $x = \exp_a(y)$. On a $\log_a(x) = y$ ou encore $\dfrac{\ln x}{\ln a} = y$ ce qui donne $\ln x = y \ln a$ et en passant à l'exponentielle $x = \exp(y \ln a)$. On a bien prouvé que $\exp_a(y) = \exp(y \ln(a))$*

Proposition 0.19
Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

1. $\exp_a 0 = 1$ et $\exp_a 1 = a$
2. $\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \exp_a(y)$
3. $\exp_a(x-y) = \dfrac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$
4. $\exp_a(nx) = (\exp_a x)^n$
5. $\exp_a x \exp_b x = \exp_{ab} x$
6. $\dfrac{\exp_a x}{\exp_b x} = \exp_{\frac{a}{b}} x$

Démonstration *Il suffit d'appliquer la formule précédente et les propriétés des fonctions logarithme et exponentielle.*

✎ *Notation 0.2* S'inspirant de la propriété précédente, si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et si $x \in \mathbb{R}$, on notera

$$a^x = \exp_a(x) = \exp(x \ln a).$$

Remarque 0.5

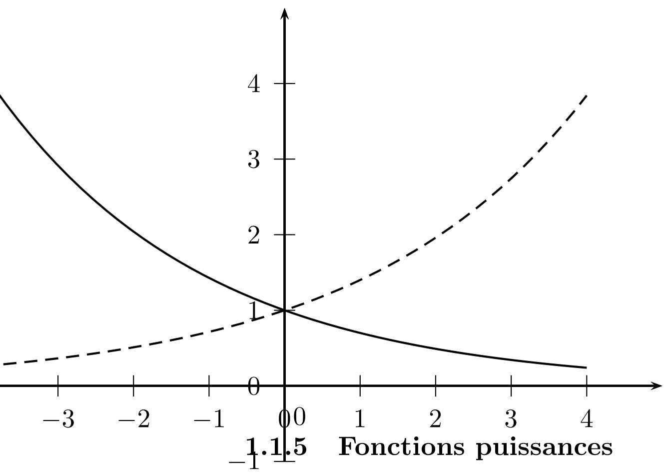
— On retrouve la notation précédente $\exp x = e^x$.

— Remarquons aussi que $1^x = \exp(x \ln 1) = 1$.

Avec ces notations, la propriété précédente devient :

Proposition 0.20
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

1. $a^0 = 1$ et $a^1 = a$
2. $a^{x+y} = a^x a^y$
3. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
4. $a^{nx} = (a^x)^n$
5. $(ab)^x = a^x b^x$
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$



1.1.5 Fonctions puissances

DÉFINITION 0.4 Fonction puissance
Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle *fonction puissance d'exposant a* la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}x \\ \longmapsto & x^a = \exp\left(a \ln x\right) & \end{array} \right.$$

Remarque 0.6

— φ_0 est la fonction constante égale à 1.

— $\varphi_1 = Id$. algébriques

PROPOSITION 0.21 Propriétés algébriques des fonctions puissances

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$

1. $x^{a+b} = x^a x^b$
2. $x^{-a} = \dfrac{1}{x^a}$
3. $(xy)^a = x^a y^a$
4. $(x^a)^b = x^{ab}$
5. $x^0 = 1$
6. $1^a = 1$
7. $\ln\left(x^a\right) = a \ln x$

Démonstration *C'est une conséquence directe de la définition et des propriétés des fonctions logarithme et exponentielle.*

PROPOSITION 0.22

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $\varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* x \\ \longmapsto & x^a & \end{array} \right.$ est

— continue $\mathbb{R}_+^*$.
— dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi_a'(x) = ax^{a-1}$.
— de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus,

— si $a > 0$, φ_a est croissante, $\varphi_a(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ et $\varphi_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

x	0		1		$+\infty$
φ_a	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

— Si $a = 0$, $\varphi_a : x \to x^0 = 1$ est constante.

— Si $a < 0$, φ_a est décroissante, $\varphi_a(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$ et $\varphi_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

x	0		1		$+\infty$
φ_a	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

— Si $a > 1$ ou si $a < 0$, φ_a est convexe et si $0 < a < 1$, φ_a est concave.

Démonstration *φ_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. De plus, par application du théorème de dérivation des fonctions composées, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$*

$$\varphi_a'(x) = \frac{a}{x} \exp(a \ln x) = ax^{-1}x^a = ax^{a-1}.$$

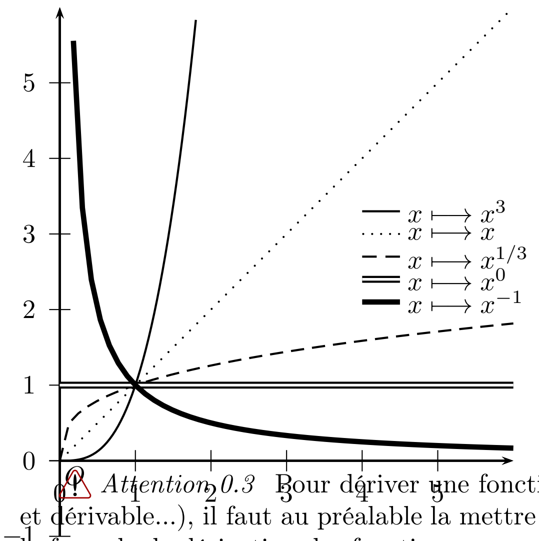
Compte tenu du signe de cette dérivée, qui est donné par celui de a, on en déduit les variations de φ_a. Calculons la limite de φ_a en $+\infty$. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^a = \exp(a \ln x)$. De plus : $\ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

— *Si $a > 0$, $a \ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et par composition de limite : $x^a = \exp(a \ln x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.*
— *Si $a = 0$, $0 = a \ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et : $x^a = x^0 = 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$.*
— *Si $a < 0$, $a \ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$ et par composition de limite : $x^a = \exp(a \ln x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.*

La limite en 0 se calcule de même.

Remarque 0.7

— Si $a > 0$, on peut prolonger φ_a par continuité en 0 en posant $\varphi_a(0) = 0$.
— Si $a > 1$, φ_a est même dérivable en 0 : $\varphi_a'(0) = 0$.
— Si $0 < a < 1$, $\varphi_a'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$ et le graphe de φ_a possède une tangente verticale à l'origine.



Attention 0.3 Pour dériver une fonction de la forme $w(x) = u(x)^{v(x)}$ (là où elle est définie et dérivable...), il faut au préalable la mettre sous la forme $w(x) = \mathit{exp}\,(v(x)\ln(u(x)))$ puis utiliser la formule de dérivation des fonctions composées. A titre d'exercice, on montrera que :

$$w'(x) = w(x)\left(v'(x)\ln\left(u(x)\right) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

1.1.6 Comparaison des fonctions logarithmes, puissances et exponentielles

Proposition 0.23
Pour tout $\alpha, \beta, \gamma > 0$

$$\boxed{\frac{(\ln x)^\gamma}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} \qquad \boxed{x^\beta \left|\ln x\right|^\gamma \xrightarrow[x\to 0]{} 0}$$

Démonstration *Comme $\beta, \gamma > 0$:*

$$\frac{(\ln x)^\gamma}{x^\beta} = \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\gamma}}}\right)^\gamma = \left(\frac{\gamma}{\beta}\frac{\ln\left(x^{\frac{\beta}{\gamma}}\right)}{x^{\frac{\beta}{\gamma}}}\right)^\gamma \overset{X=x^{\frac{\beta}{\gamma}}}{=\!=\!=} \left(\frac{\gamma}{\beta}\frac{\ln(X)}{X}\right)^\gamma \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$$

par composition de limite et par utilisation de la limite usuelle $\frac{\ln X}{X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$. La seconde limite se prouve de même.

Corollaire 0.24
Pour tout $\alpha, \beta, \gamma > 0$

$$\boxed{\frac{e^{\alpha x}}{x^{\beta}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty} \qquad \boxed{|x|^{\beta} e^{\alpha x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0}$$

Démonstration *La démonstration est identique à la précédente.*

1.2 Fonctions circulaires réciproques

1.2.1 Rappels succincts sur les fonctions trigonométriques

Effectuons un rappel sur les fonctions trigonométriques.

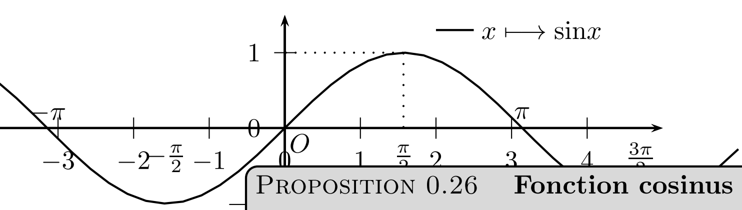
Proposition 0.25 **Fonction sinus**
La fonction *sinus*, notée sin est :

- définie sur $\mathbb{R}$.
- à valeurs dans $[-1, 1]$.
- impaire.
- 2π-périodique.
- continue sur $\mathbb{R}$.
- dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin' x = \cos x}$$

- de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$.

De plus, la restriction de la fonction sinus à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est strictement croissante.



Proposition 0.26 **Fonction cosinus**

La fonction *cosinus*, notée cos est :

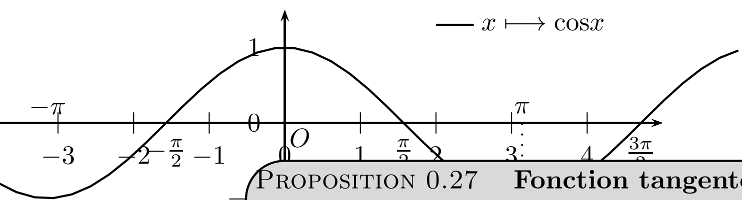
- définie sur $\mathbb{R}$.
- à valeurs dans $[-1, 1]$.
- paire.

— 2π-périodique.
— continue sur $\mathbb{R}$.
— dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos' x = -\sin x}$$

— de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

De plus, la restriction de la fonction cosinus à $[0, \pi]$ est strictement décroissante.



Proposition 0.27 Fonction tangente

La fonction *tangente*, notée tan, et donnée par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

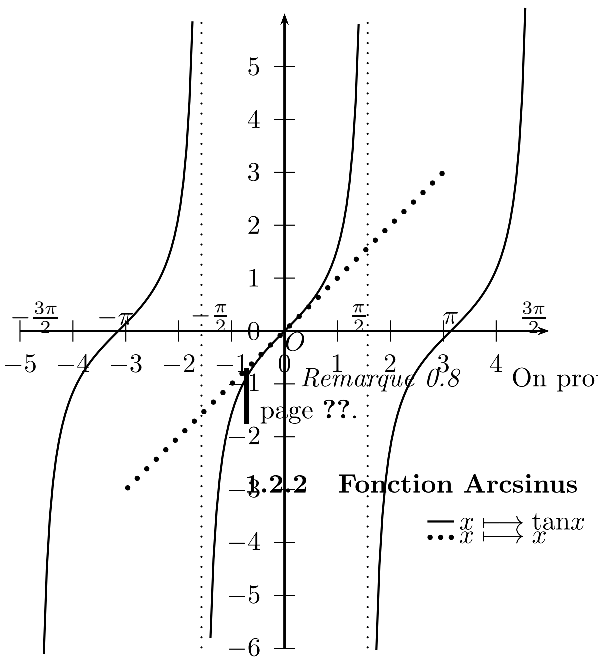
est :

— définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
— à valeurs dans $\mathbb{R}$.
— impaire.
— π-périodique.
— continue $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
— dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

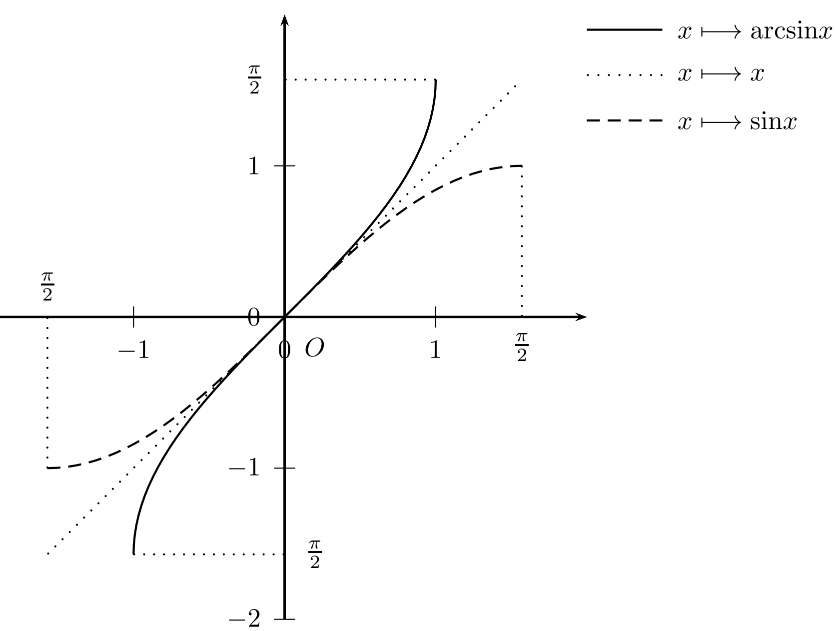
— de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

De plus, la restriction de la fonction tangente à $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est strictement croissante.



Remarque 0.8 On prouve la dérivabilité des fonctions trigonométriques dans l'exercice **??** page **??**.

1.2.2 Fonction Arcsinus



Proposition 0.28 Fonction arcsinus

La fonction sinus est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1;1]$. La bijection réciproque est appelée *fonction arcsinus* et est notée arcsin

$$\arcsin : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ y & \longmapsto & \arcsin y \end{array} \right. .$$

$$\forall y \in [-1,1], \quad \sin(\arcsin y) = y$$
$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin x) = x$$

De plus, la fonction arcsin

- est strictement croissante sur $[-1,1]$.
- est impaire.
- est continue sur $[-1,1]$.
- est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\boxed{\forall y \in \left]-1,1\right[, \quad \arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

- de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.
- réalise une bijection de $[-1,1]$ dans $[-\pi/2,\pi/2]$

y	-1		0		1
$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$	$\Vert$	$+$	1	$+$	$\Vert$
arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Démonstration ★ *La fonction sinus, sur l'intervalle* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *est*

1. *continue*
2. *strictement croissante.*

Par application du théorème de la bijection **??**, *on peut affirmer que la fonction sinus, restreinte à l'intervalle* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *définie une bijection de* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[-1;1]$. *La bijection réciproque, nommée* arcsin, *est définie sur* $[-1;1]$ *et à valeurs dans* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. *Posons* $I = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. *La fonction sinus est de plus*

1. *strictement monotone sur* I
2. *dérivable sur* I.

3. et vérifie $\forall x \in I, \quad \sin'(x) = \cos x \neq 0$

On peut alors appliquer le théorème de dérivation de la bijection réciproque 0.2 et affirmer que arcsin *est dérivable sur* $J = \sin I =]-1, 1[$*. Pour tout* $y \in J$*, on a*

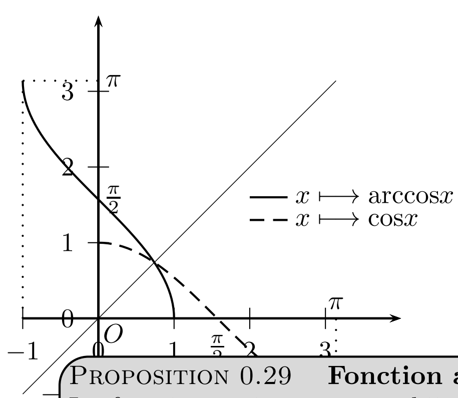
$$\arcsin' y = \frac{1}{\sin'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}$$

Mais

$$\cos(\arcsin y) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)} = \sqrt{1 - y^2}$$

car la fonction cosinus est positive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *et donc* $\arcsin' y = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$*. On vérifie sans peine les propriétés restantes.*

1.2.3 Fonction Arccosinus



Proposition 0.29 **Fonction arccosinus**

La fonction cosinus est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Sa bijection réciproque est appelée *fonction arccosinus* et est notée arccos :

$$\arccos : \begin{cases} [-1, 1] & \longrightarrow & [0, \pi] \\ y & \longmapsto & \arccos y \end{cases}$$

$$\forall y \in [-1, 1], \quad \cos(\arccos y) = y$$
$$\forall x \in [0, \pi], \quad \arccos(\cos x) = x$$

De plus arccos :

- est strictement décroissante sur $[-1, 1]$.
- est continue sur $[-1, 1]$.
- est dérivable sur $]-1, 1[$ et :

$$\boxed{\forall y \in]-1, 1[, \quad \arccos' y = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

— est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

— réalise une bijection de $[-1,1]$ dans $[0,\pi]$

y	-1		0		1
$-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$	$\Vert$	$-$	-1	$-$	$\Vert$
arccos	$-\pi$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

Démonstration ★ *La fonction cosinus, sur l'intervalle $[0,\pi]$ est*

1. *continue.*
2. *strictement décroissante.*

Par application du théorème de la bijection **??**, *on peut affirmer que la fonction cosinus, restreinte à l'intervalle $[0,\pi]$, définie une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. La bijection réciproque, nommée* arccos, *est définie sur $[-1,1]$ et à valeurs dans $[0,\pi]$. La fonction cosinus est de plus, avec $I =]0,\pi[$:*

1. *strictement monotone sur I*
2. *dérivable sur I.*
3. *et vérifie $\forall x \in I, \quad \cos'(x) = -\sin x \neq 0$*

On peut alors appliquer le théorème de dérivation de la bijection réciproque 0.2. La fonction arccos *est dérivable sur $J = \cos I =]-1,1[$ et pour tout $y \in J$, on a*

$$\arccos' y = \frac{1}{\cos'(\arccos y)} = \frac{1}{-\sin(\arccos y)}$$

Mais

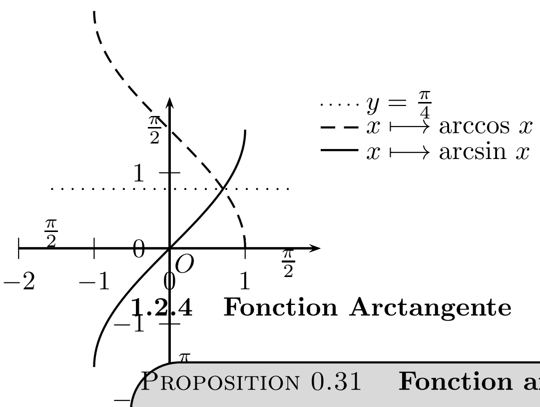
$$\sin(\arccos y) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos y)} = \sqrt{1-y^2}$$

car la fonction sinus est positive sur $]0,\pi[$. Donc $\arccos' y = \dfrac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$. On vérifie sans peine les propriétés restantes.

Proposition 0.30 **Les graphes des fonctions arcsinus et arccosinus sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \pi/4$**

$$\forall x \in [-1,1], \quad \boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}}$$

Démonstration ★ *La preuve est laissée en exercice. Il suffit de dériver la fonction $\theta : \begin{cases}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}x \\ \longmapsto & \arccos x + \arcsin x & \end{cases}$ et d'appliquer le théorème 0.3.*



1.2.4 Fonction Arctangente

Proposition 0.31 — Fonction arctangente

La fonction tangente est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est appelée *fonction arctangente* et est notée arctan :

$$\arctan : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ y & \longmapsto & \arctan y \end{cases}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan y) = y$$

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \arctan(\tan x) = x$$

La fonction arctan

- — est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- — est impaire.
- — est continue sur $\mathbb{R}$.
- — est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan' y = \frac{1}{1+y^2}}$$

- — est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- — réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$.

y	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{1+y^2}$		$+$	1	$+$	
arctan	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

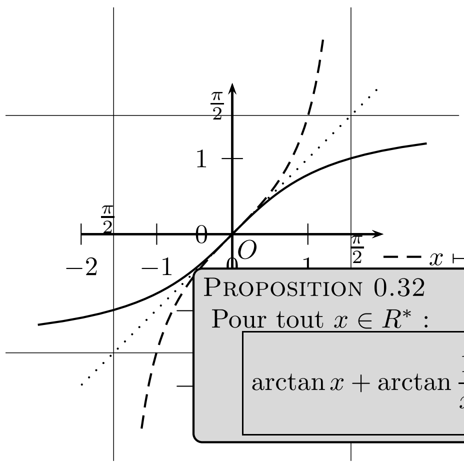
Démonstration ★ *La fonction tangente est*

1. *strictement monotone sur I*
2. *dérivable sur I.*
3. *et vérifie $\forall x \in I, \quad \tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \neq 0$*

On peut alors appliquer le théorème de dérivation de la bijection réciproque 0.2. On en déduit que $\tan$ *est bijective et que sa bijection réciproque* $\arctan$ *est dérivable sur $J = \tan(I) = \mathbb{R}$. Pour tout $y \in J$*

$$\arctan' y = \frac{1}{\tan'(\arctan y)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}.$$

On vérifie sans peine les propriétés restantes.



Proposition 0.32
Pour tout $x \in R^*$:

$$\boxed{\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 - \dfrac{\pi}{2} \\ \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

Démonstration ★ *La preuve est laissée en exercice. Il suffit, là encore, de dériver la fonction $\theta : x \mapsto \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$ sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ puis d'appliquer le théorème 0.3.*

1.3 Fonctions hyperboliques

1.3.1 Définitions et premières propriétés

Définition 0.5 **Sinus et Cosinus hyperboliques**
Les fonctions *sinus hyperbolique* sh et *cosinus hyperbolique* ch sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{ch} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \text{sh} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}x \\ \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

Remarque 0.9 Toute fonction $f : I \subset R \longrightarrow R$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$

En effet, $x \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ est paire , $x \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ est impaire. Les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique sont respectivement la partie paire et la partie impaire de la fonction exponentielle dans cette décomposition.

PROPOSITION 0.33
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1. $\boxed{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x}$
2. $\boxed{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}}$
3. $\boxed{\overset{2}{\operatorname{ch}} x - \overset{2}{\operatorname{sh}} x = 1}$

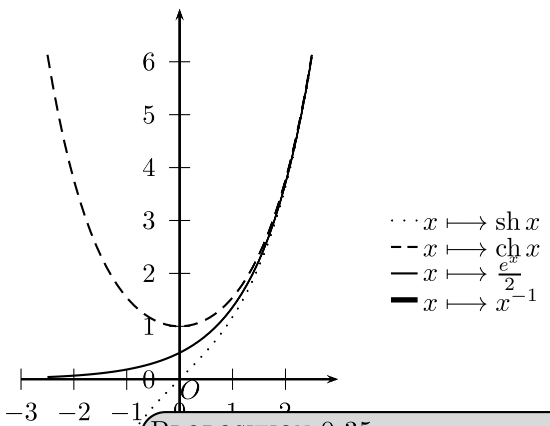
Sinus et Cosinus hyperboliques

Démonstration *Calculs immédiats.*

PROPOSITION 0.34
Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\overset{\prime}{\operatorname{ch}} x = \operatorname{sh} x} \quad \text{et} \quad \boxed{\overset{\prime}{\operatorname{sh}} x = \operatorname{ch} x}.$$

Démonstration *Calculs immédiats.*



Proposition 0.35

— La fonction sh est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'annule en 0.

— La fonction ch est paire, strictement positive sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x \geqslant 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{ch} x$		$+$	1	$+$	
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{sh} x$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Démonstration

— *Les fonctions* ch *et* sh *sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Appliquant les théorèmes de dérivation, on vérifie sans peine les formules annoncées pour leurs dérivées respectives.*

— sh *et* ch *sont respectivement impaire et paire par construction.*

— ch *est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$ car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Par conséquent,* sh *a une dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}$ et est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

— *Par application des propriétés sur les limites d'après les limites de la fonction exponentielle à ses bornes, on vérifie sans peine les limites annoncées.*

— *Évaluant* sh *en* 0*, on vérifie immédiatement qu'elle s'annule en* 0*. Comme elle est strictement croissante et continue, on en déduit qu'elle est strictement négative sur* $\mathbb{R}_-^*$ *et strictement positive sur* $\mathbb{R}_+^*$*.*

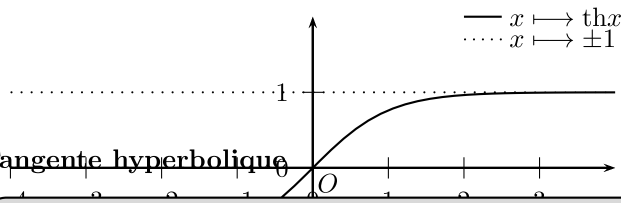
— *La fonction dérivée de* ch *sur* $\mathbb{R}$ *étant* sh*, on déduit de cette dernière propriété que* ch *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}_-^*$ *et strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$*.*

DÉFINITION 0.6 **Tangente hyperbolique**

La fonction *tangente hyperbolique*, notée th, est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{th} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}x \\ \longmapsto & \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} & \end{array} \right.$$

Remarque 0.10 La fonction th est bien définie car la fonction ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$.



Tangente hyperbolique

PROPOSITION 0.36
La fonction th est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\mathrm{th}' x = 1 - \mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}$$

Par conséquent, th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0. Elle admet en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ et en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{th}' x$		$+$	1	$+$	
th	-1	↗	0	↗	$+1$

Démonstration ★ th *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *comme quotient de fonctions de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$, *son dénominateur ne s'annulant jamais. Appliquant les formules de dérivation d'un quotient, si* $x \in \mathbb{R}$

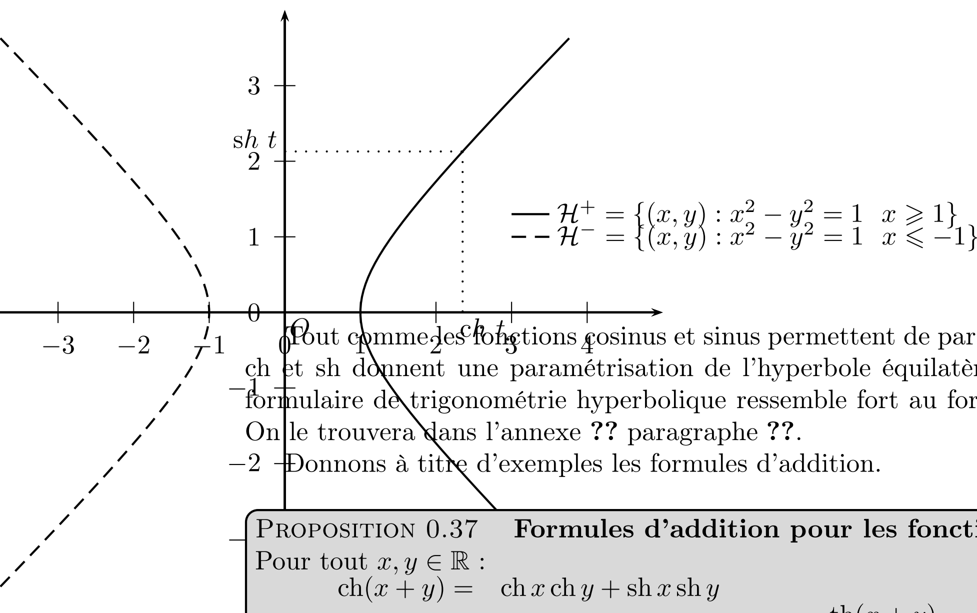
$$\operatorname{th}' x = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

L'imparité est facile à prouver. Pour les limites aux bornes du domaine, par factorisation et utilisation des limites usuelles, on obtient

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x} \frac{1 - \dfrac{e^{-x}}{e^x}}{1 + \dfrac{e^{-x}}{e^x}} = \frac{1 - \dfrac{e^{-x}}{e^x}}{1 + \dfrac{e^{-x}}{e^x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1.$$

La limite en $-\infty$ *s'obtient en utilisant l'imparité de* th.

1.3.2 Formulaire de trigonométrie hyperbolique



Tout comme les fonctions cosinus et sinus permettent de paramétrer le cercle unité, les fonctions ch et sh donnent une paramétrisation de l'hyperbole équilatère de sommets $(1,0)$ et $(-1,0)$. Le formulaire de trigonométrie hyperbolique ressemble fort au formulaire de trigonométrie classique. On le trouvera dans l'annexe **??** paragraphe **??**.

Donnons à titre d'exemples les formules d'addition.

PROPOSITION 0.37 Formules d'addition pour les fonctions hyperboliques
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \\
\operatorname{ch}(x-y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \\
\operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \\
\operatorname{sh}(x-y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y
\end{aligned}
\qquad
\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y} \quad \operatorname{th}(x-y) = \frac{\operatorname{th} x - \operatorname{th} y}{1 - \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$$

1.3.3 Fonctions hyperboliques inverses

Proposition 0.38 Fonction argument sinus hyperbolique

La fonction sinus hyperbolique définie une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}$. L'application réciproque est appelée *fonction argument sinus hyperbolique* et notée argsh :

$$\operatorname{argsh} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \operatorname{argsh} y \end{array} \right.$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} y) = y$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argsh}(\operatorname{sh} x) = x$$

La fonction argsh

- est impaire.
- est continue sur $\mathbb{R}$.
- est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argsh}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}}$$
- est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$		$+$	1	$+$	
argsh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Fonction argument sinus hyperbolique argsh

Démonstration ★ *La fonction sinus hyperbolique, sur l'intervalle* $\mathbb{R}$

1. *est strictement monotone*
2. *est dérivable*
3. *et vérifie :* $\forall x \in I, \quad \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch} x \neq 0$

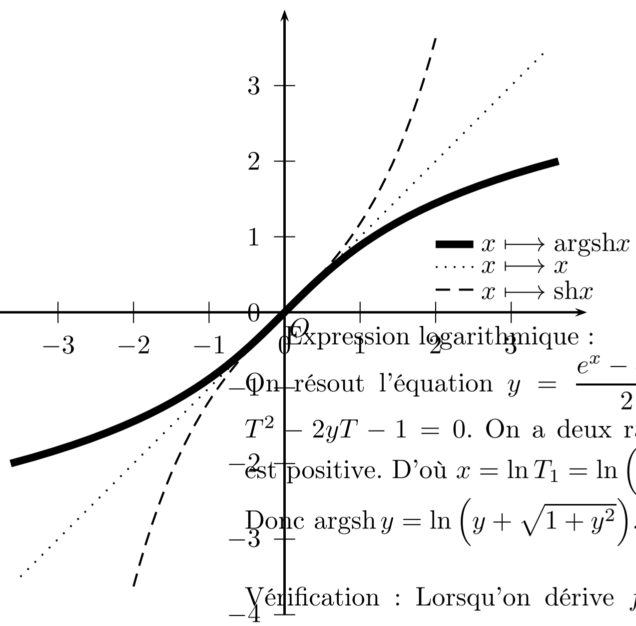
On peut alors appliquer le théorème de dérivation de la bijection réciproque 0.2 et affirmer que sh *est bijective de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Sa bijection réciproque* argsh *est de plus dérivable sur* $\operatorname{sh}\mathbb{R} = \mathbb{R}$ *et pour tout* $y \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{argsh}' y = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{argsh} y)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} y)}$$

Mais

$$\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} y) = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{argch} y)} = \sqrt{1+y^2}$$

car la fonction cosinus hyperbolique est positive sur $\mathbb{R}$. *Donc* $\operatorname{argsh}' y = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$. *On vérifie sans peine les propriétés restantes.*



Expression logarithmique :

On résout l'équation $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ soit $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$. En posant $T = e^x$, on résout $T^2 - 2yT - 1 = 0$. On a deux racines $T_1 = y + \sqrt{1+y^2}$ et $T_2 = y - \sqrt{1+y^2}$ dont une seule est positive. D'où $x = \ln T_1 = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$.

Donc $\operatorname{argsh} y = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$.

Vérification : Lorsqu'on dérive $f(y) = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$ on obtient $f'(y) = \dfrac{1 + \frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}}}{1+\sqrt{1+y^2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}}}{1+\sqrt{1+y^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$. Comme $f(0) = 0$, on a bien $f(y) = \operatorname{argsh} y$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 0.39 **Fonction argument cosinus hyperbolique**

La fonction cosinus hyperbolique, restreinte à $\mathbb{R}_+$, définit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur son image $[1, +\infty[$. L'application réciproque est appelée *argument cosinus hyperbolique* et est notée argch.

$$\operatorname{argch} : \begin{cases} [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \operatorname{argch} y \end{cases}$$

$$\forall y \in [1, +\infty[, \quad \operatorname{ch}(\operatorname{argch} y) = y$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \operatorname{argch}(\operatorname{ch} x) = x$$

La fonction argch

- est continue sur $[1, +\infty[$.
- est dérivable sur $]1, +\infty[$ et :

$$\boxed{\forall y \in \left]1, +\infty\right[, \quad \operatorname{argch}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}}$$

- est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
- réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
- est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

y	1		$+\infty$
$\frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$	$\|$	$+$	
argch	0	$\nearrow$	$+\infty$

Fonction Argument cosinus hyperbolique argch

Démonstration ★ *La fonction cosinus hyperbolique, sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, est*

1. *continue.*
2. *strictement croissante.*

Par application du théorème de la bijection 0.1, on peut affirmer que la fonction cosinus hyperbolique définie une bijection de $I = \mathbb{R}_+$ sur son image $J = [1, +\infty[$. La bijection réciproque, nommée argch, *est définie sur $J = [1, +\infty[$ et à valeurs dans $I = \mathbb{R}_+$. La fonction cosinus hyperbolique est de plus*

1. *strictement monotone sur I*
2. *dérivable sur I.*
3. *et vérifie : $\forall x \in I, \quad \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh} x \neq 0$*

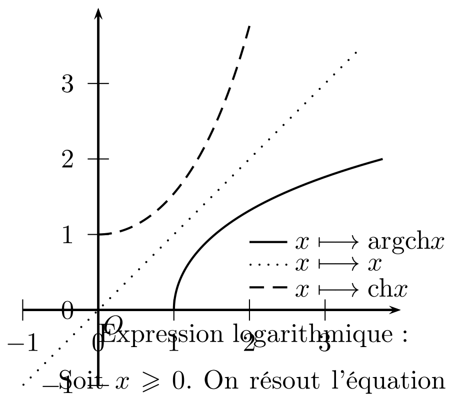
On peut alors appliquer le théorème de dérivation de la fonction réciproque 0.2 et affirmer que argsh *est dérivable sur J. De plus, pour tout $y \in J$*

$$\operatorname{argch}' y = \frac{1}{\operatorname{ch}'(\operatorname{argsh} y)} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{argch} y)}.$$

Mais

$$\operatorname{sh}(\operatorname{argsh} y) = \sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{argch} y) - 1} = \sqrt{y^2 - 1}$$

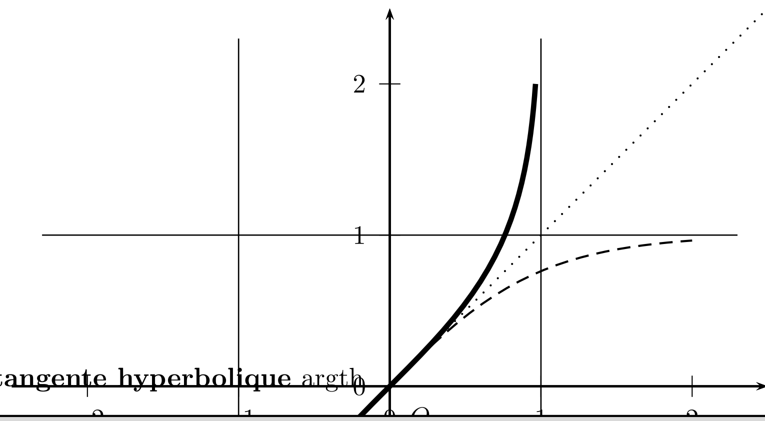
car la fonction sinus hyperbolique est positive sur $\mathbb{R}_+$. Donc $\operatorname{argch}' y = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$. On vérifie sans peine les propriétés restantes.



Expression logarithmique :

Soit $x \geqslant 0$. On résout l'équation $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ pour $y \geqslant 1$, soit $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$. En posant $T = e^x$, on résout $T^2 - 2yT + 1 = 0$. On a deux racines $T_1 = y + \sqrt{y^2 - 1}$ et $T_2 = y - \sqrt{y^2 - 1}$ dont une seule est supérieure ou égale à 1 (leur produit égale 1). D'où $x = \ln T_1 = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$. Donc $\operatorname{argch} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$.

Vérification : Lorsqu'on dérive pour $y > 1$, $f(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$ on obtient $f'(y) = \dfrac{1 + \frac{2y}{2\sqrt{y^2-1}}}{1 + \sqrt{y^2 - 1}} = \dfrac{\frac{\sqrt{y^2-1}}{\sqrt{y^2-1}} + \frac{2y}{2\sqrt{y^2-1}}}{1 + \sqrt{y^2 - 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$. Comme $f(1) = 0$, on a bien $f(y) = \operatorname{argch} y$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.



Fonction Argument tangente hyperbolique argth

Proposition 0.40 **Fonction argument tangente hyperbolique**

La fonction tangente hyperbolique définie une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $]-1,1[$. L'application réciproque est appelée *Argument tangente hyperbolique* et est notée argth.

$$\operatorname{argth} : \left\{ \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \operatorname{argth} y \end{array} \right.$$

$$\forall y \in]-1,1[, \quad \operatorname{th}(\operatorname{argth} y) = y$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argth}(\operatorname{th} x) = x$$

La fonction argth

— est impaire.

— est strictement croissante sur $]-1,1[$.

— est continue sur $]-1,1[$.

— est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\boxed{\forall y \in]-1,1[, \quad \operatorname{argth}' y = \frac{1}{1-y^2}}$$

— réalise une bijection de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.

— est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

x	-1		0		1
$\frac{1}{1-y^2}$	$\Vert$	$+$	1	$+$	$\Vert$
argth	$\Vert$	$-\infty \nearrow$	0	$\nearrow +\infty$	$\Vert$

Démonstration ★ *La fonction tangente hyperbolique, sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$*

1. *est strictement monotone sur I*
2. *est dérivable sur I.*
3. *et vérifie $\forall x \in I, \quad \operatorname{th}'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \neq 0$*

On peut alors appliquer le théorème de dérivation de la fonction réciproque 0.2 et affirmer que argth *est dérivable sur $J = \operatorname{th}(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $y \in J$*

$$\operatorname{argth}' y = \frac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{argth} y)} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{argth} y)} = \frac{1}{1-y^2}.$$

On vérifie sans peine les propriétés restantes.

Expression logarithmique :

On résout l'équation $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ pour $|y| < 1$, soit $e^{2x}(1-y) = 1+y$, soit $e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}$ et $x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$.

Donc $\operatorname{argth} y = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$.

Vérification : Lorsqu'on dérive pour $y > 1$, $f(y) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$ on obtient bien $f'(y) = \dfrac{1}{1-y^2}$.
Comme $f(0) = 0$, on a bien $f(y) = \operatorname{argth} y$ sur l'intervalle $]-1,1[$.

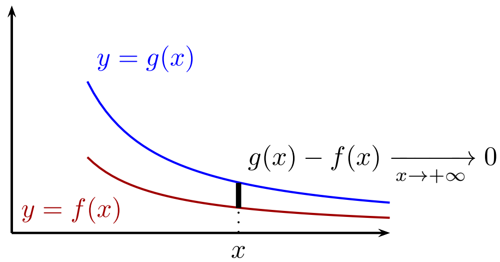
1.4 Deux exemples

Définition 0.7 **Asymptotes**
Soit $f : [c, +\infty] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'une courbe $y = g(x)$ est *asymptote* à la courbe $y = f(x)$ en $+\infty$ si et seulement si :

$$g(x) - f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

En particulier, une droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f si et seulement si :

$$f(x) - [ax + b] \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$



Plan 0.1 : $\boxed{\text{Méthode pratique de recherche d'asymptotes}}$

1. *Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$, la droite horizontale $y = l$ est asymptote. On lit sur le tableau de variations la position de la courbe par rapport à l'asymptote.*
2. *Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \infty$, on calcul la limite de $f(x)/x$ en $+\infty$.*
3. *Si cette limite existe et est égal à un réel $a \neq 0$, on calcule $f(x) - ax$ et on cherche la limite de $f(x) - ax$ en $+\infty$. Si $f(x) - ax \to b \in \mathbb{R}$, la droite $y = ax + b$ est asymptote. On détermine la position de la courbe par rapport à l'asymptote en étudiant le signe de $f(x) - [ax + b]$ au voisinage de $+\infty$.*
4. *Si $\dfrac{f(x)}{x} \to \infty$, on dit qu'on a une branche parabolique de direction $(0y)$. Si $\dfrac{f(x)}{x} \to 0$, une branche parabolique de direction $(0x)$.*
5. *Si $f(x)/x^2$ admet une limite finie a non nulle et que ce n'est pas le cas de $f(x)/x$, on peut rechercher des paraboles asymptotes.*

Plan 0.2 : $\boxed{\text{Plan d'étude d'une fonction}}$

1. *Trouver le domaine de définition.*
2. *Calculer la dérivée (factoriser) et étudier son signe.*
3. *Tableau de variations. On précise les valeurs exactes remarquables, les limites et les prolongements éventuels (on étudie alors la dérivabilité de la fonction prolongée).*
4. *Recherche d'éventuelles asymptotes.*
5. *Tracé approximatif de la courbe $y = f(x)$: on représente les asymptotes éventuelles, les tangentes horizontales*

Remarque 0.11 La représentation de valeurs particulières numériques obtenues à l'aide de la calculatrice ne présente en général aucun intérêt !

Exercice 0.1

Étudier la fonction définie par $f(x) = x^{x+1}$.

Solution :

1. *Comme :*
$$f(x) = x^{x+1} = e^{(x+1)\ln x}.$$
f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $f'(x) = \dfrac{x\ln x + x + 1}{x} x^{x+1}$ donc f est du signe de $x\ln x + x + 1$. Introduisons la fonction :* $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln x + x + 1 \end{array} \right.$. *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $g'(x) = \ln x + 2$. On en déduit les variations de g et le signe de f'.*

x	0		e^{-2}		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| 1	$\searrow$	$g\left(e^{-2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	$f'\left(e^{-2}\right)$	$+$	

Remarquons que $g\left(e^{-2}\right) > 0$ et en utilisant les limites usuelles, on obtient : $g(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$.

3. *Le tableau de variation de f est donc :*

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	|| 1	$+$	
$f(x)$	|| 0	$\nearrow$	$+\infty$

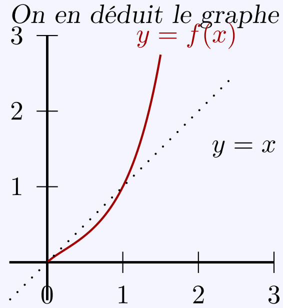
les limites étant obtenues en utilisant les limites usuelles et par opération sur les limites.

4. *Le graphe de f admet une branche infinie quand $x \to +\infty$. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$:*

$$\frac{x^{x+1}}{x} = x^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Le graphe de f n'admet donc pas d'asymptote quand $x \to +\infty$. On a affaire à une branche parabolique de direction Oy.

5. *On en déduit le graphe de f :*



Exercice 0.2

Étudier la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Solution :

1. *Nous déduisons du tableau de signe*

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-1}{x+1}$		$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

   que f est définie sur $I =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$.

2. *f est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ car la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit x un élément de cet ensemble. On trouve :*

$$f'(x) = \frac{x^2+x-1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\,(x+1)^2}.$$

   f' est donc du signe de x^2+x-1. Les racines de ce trinômes sont $\alpha = \left(-1+\sqrt{5}\right)/2$ et $\beta = \left(-1-\sqrt{5}\right)/2$. Seul α est dans le domaine de définition de f. Pour les limites, on remarque que :

$$f(x) = x\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}}$$

   et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Par limites usuelles, il est clair que $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$. On en déduit de la tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		α		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			$+\infty$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$		0	$\nearrow$	$+\infty$

3. *Le graphe de f admet une branche infinie quand $x \to \pm\infty$ et quand $x \to -1^-$.*

   —

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$$

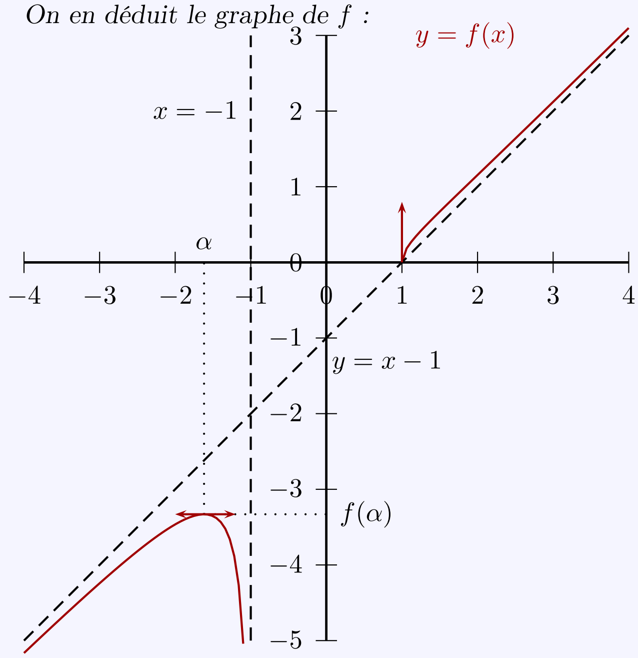
   et par multiplication par les quantités conjuguées,

$$f(x)-x = x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right) = x\frac{\dfrac{x-1}{x+1}-1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+1} = \frac{\dfrac{-2x}{x+1}}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+1} = \frac{\dfrac{-2}{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}}+1} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} -1$$

La droite d'équation $\boxed{y = x - 1}$ est donc asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

— *On a une asymptote verticale au voisinage de -1 d'équation $x = -1$.*

4. *On en déduit le graphe de f :*



1.5 Fonction exponentielle complexe

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On s'intéresse ici à une fonction f définie sur I et à valeurs complexes $f : I \in \mathbb{C}$. Pour tout $t \in I$, une telle fonction s'écrit sous la forme : $f(t) = x(t) + iy(t)$. avec $x, y : I \to \mathbb{R}$. Les fonctions x et y sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de f.

Soit $t_0 \in I$. On dit que f est dérivable en t_0 si et seulement si x et y le sont. Dans ce cas, on définit $f'(t_0)$ par :

$$f'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0).$$

Proposition 0.41

Soit φ une fonction définie et dérivable de I dans $\mathbb{C}$. la fonction f définie sur I par

$$\forall t \in I, \quad f(t) = e^{\varphi(t)}$$

est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = \varphi'(t)e^{\varphi(t)}.$$

Démonstration *Soit $t \in I$. Si φ_1 est la partie réelle de φ et si φ_2 est la partie imaginaire de φ, on peut écrire $f(t)$ sous la forme :*

$$f(t) = e^{\varphi(t)} = e^{\varphi_1(t)+i\varphi_2(t)} = e^{\varphi_1(t)} e^{i\varphi_2(t)} = e^{\varphi_1(t)} \left(\cos(\varphi_2(t)) + i\sin(\varphi_2(t))\right).$$

Par application de la définition, on en déduit que :

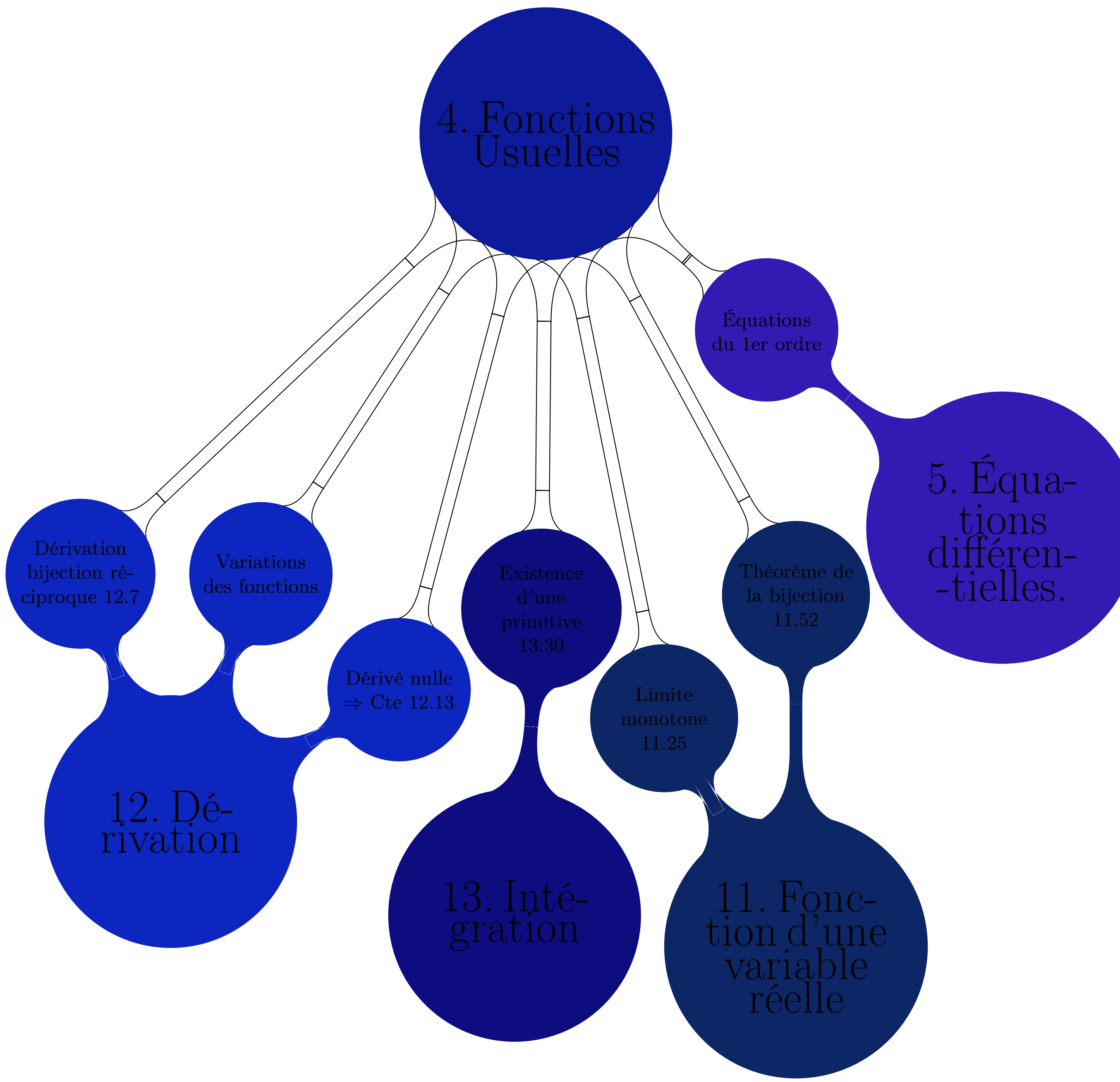
$$\begin{aligned} f'(t) = & \quad \varphi_1'(t)\, e^{\varphi_1(t)} \left(\cos(\varphi_2(t)) + i\sin(\varphi_2(t))\right) + e^{\varphi_1(t)} \left(-\varphi_2'(t)\sin(\varphi_2(t)) + i\varphi_2'(t)\cos(\varphi_2(t))\right) \\ = & \quad \varphi_1'(t)\, e^{\varphi_1(t)} \left(\cos(\varphi_2(t)) + i\sin(\varphi_2(t))\right) + i\varphi_2'(t)\, e^{\varphi_1(t)} \left(i\sin(\varphi_2(t)) + \cos(\varphi_2(t))\right) \\ = & \quad \left(\varphi_1'(t) + i\varphi_1'(t)\right) e^{\varphi_1(t)} \left(\cos(\varphi_2(t)) + i\sin(\varphi_2(t))\right) = \varphi'(t)e^{\varphi(t)} \end{aligned}$$

Remarque 0.12 On en déduit que pour tout $a \in \mathbb{C}$, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{at}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = ae^{at}$.

En résumé

Il est opportun de lire les paragraphes **??** et **??** de l'annexe **??** qui contiennent des méthodes pour construire des inégalités et dans lesquels sont promulgués quelques conseils pour le calcul des dérivées. Au terme de ce chapitre, le formulaire sur les dérivées des fonctions usuelles **??** et celui sur les limites usuelles **??** devront être parfaitement connus. Vous devrez par ailleurs être totalement familier avec ces nouvelles fonctions que vous serez amené à manipuler quotidiennement en sup et en spé.

Il conviendra de retenir parfaitement les graphes et l'expression des dérivées des fonctions introduites dans ce chapitre.



Références