# Nombres complexes

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

## 1 Nombres complexes

En 1545, le mathématicien Gerolamo Cardano publie une formule donnant une solution par radicaux de l'équation [1] $x^3 = ax + b$ :

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Cette formule avait été découverte par les mathématiciens del Ferro et Tartaglia. Ce dernier l'avait communiqué à Cardano en lui demandant de s'engager à ne pas la publier, promesse que Cardano ne tint pas.

Bombelli, en 1572, applique la formule à l'équation $x^3 = 9x + 2$ et il obtient :

$$x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{-26}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{-26}}.$$

Il relève par ailleurs que $x = 4$ et $x = -2 \pm \sqrt{3}$ sont les 3 solutions de l'équation. Il se retrouve donc face au problème suivant : alors que les solutions de l'équation sont toutes réelles, il faut écrire des racines de nombres négatifs pour les calculer. Bombelli ne se démonte pas et il invente alors des règles de calcul permettant de manipuler des quantités de la forme $a + \sqrt{-b}$ avec $b > 0$ qui n'ont pas de sens. Il écrit par exemple $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$. Ces nouveaux nombres ne sont pas compris tout de suite et leur manipulation conduit à des absurdités. Au 17e siècle, René

1. Les nombres complexes ont été découvert en étudiant des équations polynomiales de degré 3 et non pas de degré 2 car les mathématiciens du 16e siècle considèrent que des quantités comme $x^2 + 1$ sont strictement positives et que cela n'a pas de sens de chercher leurs racines

Descartes propose, tant leur existence est contestable, de les appeler nombres imaginaires [2]. Il faut attendre la fin du 18 $^{e}$ siècle et les travaux de Caspar Wessel pour que la construction des nombres complexes soit bien formalisée et pour comprendre leur interprétation géométrique. Ses travaux passent malheureusement complètement inaperçus. Quelques années plus tard, Carl Friedrich Gauss redécouvre et popularise les travaux de Wessel. Il démontre en particulier le théorème fondamental de l'algèbre (voir théorème **??** page **??**) qui dit qu'un polynôme à coefficients complexes de degré $n$ admet $n$ racines comptées avec leur multiplicité.

Ce chapitre reprend et approfondit les notions apprises au lycée quant aux nombres complexes. On verra en particulier comment on peut les utiliser pour trouver les racines de certains polynômes à coefficients réels ou complexes, comment ils servent à résoudre des problèmes de géométrie plane ainsi que des problèmes d'analyse réelle comme celui de la primitivation de produits de fonctions trigonométriques ou la résolution d'équations trigonométriques. Ce chapitre servira aussi d'introduction à la notion de structure algébrique et plus particulièrement à celle de groupe et celle de corps. Les groupes sont des objets fondamentaux et vous verrez qu'ils sont omniprésents dans le cours de mathématiques durant vos deux années en classe préparatoire.

Les fonctions trigonométriques seront utilisées en permanence pendant ces deux années et ce dès ce premier chapitre. Il est indispensable d'avoir une connaissance parfaite du paragraphe **??** page **??** de l'annexe **??**.

Vous aurez aussi souvent à manipuler des sommes ou des produits (symbolisés respectivement par les symboles $\sum$ et $\Pi$). Il sera utile pour vous familiariser avec ces calculs de lire le paragraphe **??** page **??**, toujours dans l'annexe **??**. Vous y trouverez les définitions de ces symboles ainsi que des méthodes et des formules classiques : télescopage, formule du binôme, sommes géométriques, arithmétiques, etc ... Ces notions seront re-précisées au chapitre **??**.

C'est plus Zamuzant en Z.

Publicité Peugeot - 20$^{e}$ siècle.

## 1.1 Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

### 1.1.1 Un peu de vocabulaire

Définition 0.1 **Produit cartésien**
On appelle *produit cartésien* de deux ensembles $A$ et $B$ l'ensemble, noté $A \times B$, des couples $(a, b)$ où $a \in A$ et $b \in B$.

✎ *Notation 0.1* On notera $A^2$ le produit cartésien $A \times A$.

*Exemple 0.2* $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels.

2. Les nombres négatifs ne sont d'ailleurs alors guère mieux compris. Dans son dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, d'Alembert en parle comme d'une idée dangereuse : « Il faut avouer qu'il n'est pas facile de fixer l'idée des quantités négatives, & que quelques habiles gens ont même contribué à l'embrouiller par les notions peu exactes qu'ils en ont données. Dire que la quantité négative est au-dessous du rien, c'est avancer une chose qui ne se peut pas concevoir. Ceux qui prétendent que 1 n'est pas comparable à $-1$, & que le rapport entre 1 & $-1$ est différent du rapport entre $- -1$ & 1, sont dans une double erreur : (...) Il n'y a donc point réellement & absolument de quantité négative isolée : $-3$ pris abstraitement ne présente à l'esprit aucune idée. »

Définition 0.2 **Loi de composition interne**
Soit $E$ un ensemble. On appelle *loi de composition interne* une application de $E \times E$ dans $E$ :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E(a,b) \\ & \longmapsto & a \star b \end{array} \right.$$

*Exemple 0.3* Si $E = \mathbb{N}$, la multiplication ou l'addition des entiers forme une loi de composition interne. Ce n'est pas le cas de la soustraction car la différence de deux entiers positifs n'est pas toujours un entier positif.

### 1.1.2 Construction de $\mathbb{C}$

Définition 0.3 **Corps des nombres complexes**
Nous appellerons *corps des nombres complexes* que nous noterons $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux lois internes $\oplus$ et $\otimes$ définies de la façon suivante. Pour tous couples $(a,b)\,,\ (a',b') \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$(a,b) \oplus (a',b') = (a+a', b+b')$$

$$(a,b) \otimes (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

*Remarque 0.1* Nous expliciterons et justifierons l'utilisation du mot *corps* un peu plus loin.

— Pour simplifier les écritures, nous noterons $+$ et $\times$ (ou $\cdot$) les lois de composition interne $\oplus$ et $\otimes$.
— Pour tout nombre réel $a$, nous conviendrons d'identifier le nombre complexe $(a,0)$ avec le réel $a$. Nous noterons par ailleurs $i$ le nombre complexe $(0,1)$. En appliquant cette convention et en utilisant la définition de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{C}$, on peut écrire pour tout nombre complexe $(a,b)$,
$$(a,b) = a + i\,b.$$
En effet, $(a,b) = (a,0) + (0,b)$. Par ailleurs, $(0,b) = (b,0) \times (0,1) = i.b$ donc $(a,b) = a + i.b$ ou plus simplement $a + ib$.

Proposition 0.1
Le nombre complexe $i$ précédemment introduit vérifie $\boxed{i^2 = -1}$.

***Démonstration*** *On a* $i^2 = (0,1) \times (0,1) = (-1,0) = -(1,0) = -1$.

### 1.1.3 Propriétés des opérations sur $\mathbb{C}$

Avec les conventions d'écriture précédentes, l'addition et la multiplication définies sur $\mathbb{R}^2$ deviennent pour tous complexes $a + i\,b$ et $a' + i\,b'$,

$$(a + i\,b) + (a' + i\,b') = (a + a') + i(b + b')$$

$$(a+i\,b)(a'+i\,b')=(aa'-bb')+i(ab'+ba')$$

Proposition 0.2 **Propriétés de l'addition dans $\mathbb{C}$**
L'addition dans $\mathbb{C}$

— est *associative* : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, \quad z+(z'+z'')=(z+z')+z''$ ;

— est *commutative* : $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad z+z'=z'+z$

— possède un *élément neutre* 0 : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad z+0=z$ ;

— de plus, tout nombre complexe $z=a+i\,b$ possède un *opposé*, $-z=-a-ib$.

On résume ces quatre propriétés en disant que $(\mathbb{C},+)$ est un *groupe commutatif*.

***Démonstration*** *Vérifications laissées en exercice au lecteur.*

*Remarque 0.2* Expliquons brièvement ce qu'est un groupe. Cette notion sera développée et étudiée dans le chapitre **??**. Considérons un ensemble $G$ et une application $\star$ qui à un couple $(x,y)$ d'éléments de $G$ associe un élément noté $x\star y$ de $G$. Une telle application est appelée une loi de composition interne sur $G$. On dit que $(G,\star)$ est un groupe si $\star$ est une loi de composition interne sur $G$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. la loi $\star$ est associative : $\forall x, y, z \in G, \quad x\star(y\star z)=(x\star y)\star z$.
2. la loi $\star$ admet un élément neutre $e \in G$ : $\forall x \in G, \quad x\star e=e\star x=x$.
3. tout élément $x$ de $G$ admet un symétrique $y$ : $\forall x \in G, \quad \exists y \in G \ : \quad x\star y=y\star x=e$.

Si de plus la loi $\star$ est commutative, c'est-à-dire si elle vérifie : $\forall x, y \in G, \quad x\star y=y\star x$, alors on dit que le groupe est *abélien* (ou *commutatif*).

Il est clair que l'addition dans $\mathbb{C}$ vérifie ces propriétés. C'est aussi le cas de la multiplication dans $\mathbb{C}^*$ [3] :

Proposition 0.3 **Propriétés de la multiplication dans $\mathbb{C}$**
La multiplication dans $\mathbb{C}$

— est *associative* : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, \quad z(z'z'')=(zz')z''$

— est *commutative* : $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad zz'=z'z$

— possède un *élément neutre* 1 : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad z\times 1=z$

De plus, tout nombre complexe non nul $z=a+i\,b$ possède un *inverse* $z^{-1}$ vérifiant $z\times z^{-1}=1$ donné par

$$\boxed{z^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}}.$$

On résume ces quatre propriétés en disant que $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un *groupe commutatif*.

3. $C^*$ représente l'ensemble des nombres complexes privé de 0

***Démonstration*** *Prouvons l'existence d'un inverse. Soit $z = a+i\,b$ un complexe non nul. Remarquons que $(a+i\,b)(a-i\,b) = a^2+b^2$. Le complexe $z$ étant non nul, $a^2+b^2 \neq 0$* [4]*. En divisant les deux membres de l'égalité par $a^2+b^2$, on trouve*

$$(a+i\,b) \times \frac{a-ib}{a^2+b^2} = 1$$

*ce qui prouve que $z$ possède un inverse $z^{-1}$ qui s'écrit $\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$.*

De plus, la multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, \quad z\,(z'+z'') = zz' + zz'' \quad \text{et} \quad (z+z')\,z'' = zz'' + z'z''.$$

On résume les deux propositions précédentes en disant que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un *corps*. Nous définirons ce terme dans le chapitre **??**.

Une conséquence importante est que les formules fondamentales suivantes sont valables dans $\mathbb{C}$ :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}} \qquad \text{Formule du binôme}$$

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k} \qquad \text{Formule de factorisation}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1n+1 \\ \text{si } q = 1 & \end{cases}} \qquad \text{Somme géométrique}$$

Les deux premières seront démontrées dans le théorème **??** page **??** et la troisième dans la proposition **??** page **??**.

## 1.2 Parties réelle, imaginaire, Conjugaison

### 1.2.1 Partie réelle, partie imaginaire d'un nombre complexe

PROPOSITION 0.4

Soient $a$, $a'$, $b$ et $b'$ des réels. On a :

- $a+i\,b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$.
- $a+i\,b = a'+i\,b' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.

Pour tout nombre complexe $z$ il existe donc un unique couple $(a, b)$ de réels tels que $z = a+i\,b$.

- $a+i\,b$ est la *forme algébrique de $z$*.
- $a$ est la *partie réelle de $z$*. On la note $\mathrm{Re}(z)$
- $b$ est la *partie imaginaire de $z$*. On la note $\mathrm{Im}(z)$.

***Démonstration*** *En utilisant les conventions précédentes, $a+i\,b = 0$ se lit $(a,b) = (0,0)$ ce qui est vrai si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$. La suite en découle facilement.*

4. En effet, si la somme de deux nombres positifs est nulle, alors ces deux nombres sont nécessairement nuls.

Dans toute la suite du chapitre $a$ et $b$ désignent des nombres réels sauf mention du contraire.

PROPOSITION 0.5 **Nombre imaginaire pur**

1. Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle

$$\boxed{z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0}$$

2. Si un nombre complexe a sa partie réelle nulle, on dit qu'il est *imaginaire pur*. On notera $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs

$$\boxed{z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0}$$

***Démonstration*** *C'est une conséquence directe des définitions.*

### 1.2.2 Conjugaison

DÉFINITION 0.4 **Conjugué d'un nombre complexe**
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, un nombre complexe. On appelle *complexe conjugué* de $z$ que l'on note $\bar{z}$ le nombre complexe défini par $\boxed{\bar{z} = a - i\,b}$.

PROPOSITION 0.6
Pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, on a

1. $\boxed{\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}}$
2. $\boxed{\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}}$.
3. $\boxed{\bar{\bar{z}} = z}$.
4. $\boxed{\bar{z} = z \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}}$
5. $\boxed{\bar{z} = -z \Longleftrightarrow z \in i\mathbb{R}}$

***Démonstration*** *Calculs immédiats.*

PROPOSITION 0.7 **Propriétés de la conjugaison**
Pour tous complexes $z, z' \in \mathbb{C}$,

1. $\boxed{\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'}$
2. $\boxed{\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'}$
3. $\boxed{\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}'}}$ si $z' \neq 0$.

***Démonstration*** *Calculs immédiats. Pour le quotient* $(3)$, *on peut raccourcir les calculs en remarquant que si* $u = z/z'$ *alors* $z = u\,z'$ *et appliquer* $(2)$.

*Application 0.4* **Mise sous forme algébrique d'un quotient de nombres complexes.** Pour mettre sous forme algébrique le complexe $\dfrac{3-2i}{2+i}$, on multiplie le quotient, en haut et en bas par le conjugué du dénominateur :

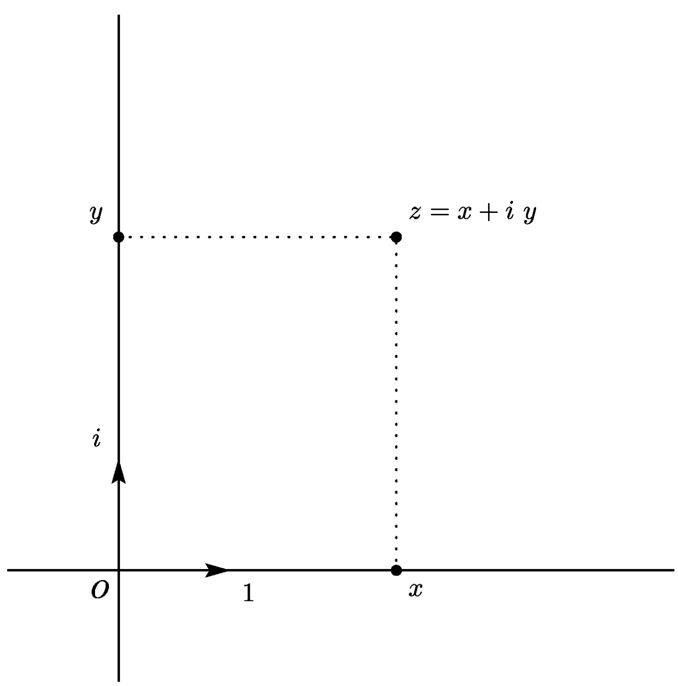
$$\frac{3-2i}{2+i} = \frac{(3-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{4-7i}{2^2-i^2} = \frac{1}{5}(4-7i)$$

*Remarque 0.3* Si $z \in \mathbb{C}$ alors $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+^*$.

## 1.3 Représentation géométrique des complexes

### 1.3.1 Représentation d'Argand

On notera $\mathscr{P}$ l'ensemble des points du plan et $\mathscr{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan. Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal du plan. À tout point $M$ de coordonnées $(x, y)$ dans ce repère on peut faire correspondre le nombre complexe $z = x + i\,y$. On réalise ainsi une bijection de $\mathbb{C}$ vers le plan. À tout nombre complexe on peut faire correspondre un unique point du plan et réciproquement à tout point du plan on peut faire correspondre un unique complexe. Cette représentation est due au mathématicien français **Jean Robert Argand** $(1768-1822)$ et va s'avérer d'un grand intérêt en géométrie. Certains problèmes de géométrie se traduisent très bien en calculs faisant intervenir des nombres complexes et réciproquement, certains calculs avec les nombres complexes ont une interprétation géométrique naturelle.



De la même façon, on peut identifier l'ensemble des vecteurs $\mathscr{V}$ du plan avec $\mathbb{C}$ en associant à tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\mathscr{V}$ de coordonnées $(\alpha, \beta)$ dans $\mathcal{R}$ le complexe $\alpha + i\,\beta$ et réciproquement.

DÉFINITION 0.5 **Image d'un nombre complexe, affixe d'un point, d'un vecteur**
Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormal du plan.

— L'*image* du nombre complexe $z = x + i\,y$ est le point du plan de coordonnées $(x, y)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

— L'*affixe du point* $M$ de coordonnées $(x, y)$ dans le repère $\mathcal{R}$ est le nombre complexe $z = x+i\,y$ que l'on notera $\operatorname{Aff}(M)$.

— L' *affixe du vecteur* $\overrightarrow{v} = \alpha\,\overrightarrow{\imath} + \beta\,\overrightarrow{\jmath}$ est le complexe $\alpha + i\,\beta$ que l'on notera $\operatorname{Aff}(\overrightarrow{u})$.

*Remarque 0.4* Les points du plan d'affixe réelle sont situés sur *l'axe réel* $(O, \overrightarrow{\imath})$. Ceux qui ont une affixe imaginaire sont situés sur *l'axe imaginaire* $(O, \overrightarrow{\jmath})$.

### 1.3.2 Interprétation géométrique de quelques opérations

On considère dorénavant et pour tout le reste du chapitre qu'un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ a été fixé, ce qui permet d'identifier $\mathbb{C}$ au plan $\mathscr{P}$.

PROPOSITION 0.8 **Propriétés de l'affixe**
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{V}$. Soient $A$ et $B$ deux points de $\mathscr{P}$ :

$$\boxed{\operatorname{Aff}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \operatorname{Aff}(\overrightarrow{u}) + \operatorname{Aff}(\overrightarrow{v})}$$

$$\boxed{\operatorname{Aff}(\overrightarrow{AB}) = \operatorname{Aff}(B) - \operatorname{Aff}(A)}$$

***Démonstration***

1. *Supposons que* $\operatorname{Aff}(\overrightarrow{u}) = a + i\,b$ *et* $\operatorname{Aff}(\overrightarrow{v}) = c + i\,d$ *alors* $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{\imath} + b\overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{v} = c\overrightarrow{\imath} + d\overrightarrow{\jmath}$ *et* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (a + c)\overrightarrow{\imath} + (b + d)\overrightarrow{\jmath}$. *Ce qui prouve que* $\operatorname{Aff}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = (a + c) + i(b + d) = (a + i\,b) + (c + i\,d) = \operatorname{Aff}(\overrightarrow{u}) + \operatorname{Aff}(\overrightarrow{v})$.
2. *Comme* $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, *en utilisant l'égalité précédente, on obtient* $\operatorname{Aff}(\overrightarrow{OB}) = \operatorname{Aff}(\overrightarrow{OA}) + \operatorname{Aff}(\overrightarrow{AB})$, *soit* $\operatorname{Aff}(B) = \operatorname{Aff}(A) + \operatorname{Aff}(\overrightarrow{AB})$.

PROPOSITION 0.9 **Interprétation géométrique de** $z \mapsto z + a$
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur d'affixe $a$. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point d'affixe $z + a$.

***Démonstration*** *Au point* $M$ *de* $\mathscr{P}$, *la translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$ *associe le point* $M'$ *tel que* $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{u}$. *Si* $z, z'$ *et* $a$ *sont les affixes respectives de* $M$, $M'$ *et* $\overrightarrow{u}$, *la proposition précédente conduit à* $z' = z + a$.

**Proposition 0.10 Interprétation géométrique de $z \mapsto \bar{z}$**
La réflexion d'axe $(O, \vec{\imath})$ est l'application qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point d'affixe $\bar{z}$.

***Démonstration*** *La réflexion d'axe $(O, \vec{\imath})$ associe à tout point $M$ de coordonnées $(x, y)$ le point $M'$ de coordonnées $(x, -y)$. La proposition s'en déduit immédiatement.*

## 1.4 Module d'un nombre complexe, inégalités triangulaires

**Définition 0.6 Module d'un nombre complexe**
Soient $z = a + i\,b$ un nombre complexe et $M$ son image dans $\mathscr{P}$. On appelle *module* de $z$ le *réel positif ou nul* noté $|z|$ et donné par :

$$|z| = ||\overrightarrow{OM}||$$

**Proposition 0.11 Expression du module d'un nombre complexe**
Pour tout complexe $z = a + i\,b$,

$$\boxed{|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

***Démonstration*** *Soit $z = a + i\,b \in \mathbb{C}$ et soit $M$ l'image de $z$ dans $\mathscr{P}$ alors on sait que $|z|^2 = ||\overrightarrow{OM}||^2 = a^2 + b^2$. Par ailleurs, $z\bar{z} = (a + i\,b)(a - i\,b) = a^2 + b^2$.*

**Proposition 0.12 Propriétés du module**
Pour tout nombre complexe $z$,

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|z| = |\bar{z}|$
3. $\mathrm{Re}(z) \leqslant |\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$
4. $\mathrm{Im}(z) \leqslant |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$

***Démonstration***

1. *Soit $z = a + i\,b \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 0$ alors $a^2 + b^2 = 0$ ce qui n'est possible que si $a = b = 0$. Réciproquement, si $z = 0$ alors $|z| = 0$.*
2. *Évident.*
3. *Si $z = a + i\,b$ alors $\mathrm{Re}(z) = a \leqslant |a| = \sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.*
4. *De même.*

**Proposition 0.13**
Pour tous nombres complexes $z, z'$,

1. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ si $z \neq 0$.
2. $|z| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{z} = \bar{z}$.
3. $\boxed{|zz'| = |z||z'|}$.
4. $\boxed{\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}}$ si $z' \neq 0$.

***Démonstration***

1. *Si $z \in \mathbb{C}^*$, on a*
$$z \times \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z\overline{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$$
*donc* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.
2. *Si $|z| = 1$, le résultat précédent amène :* $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$. *La réciproque est évidente.*
3. *Pour la troisième, écrivons $|zz'|^2 = (zz')\overline{(zz')} = z\bar{z}z'\bar{z}' = |z|^2|z'|^2$. On termine en passant à la racine carrée et en remarquant que $|zz'| \geqslant 0$ et que $|z| \geqslant 0$, $|z'| \geqslant 0$.*
4. *Et pour la dernière :* $\left|\dfrac{z}{z'}\right|^2 = \dfrac{z}{z'}\dfrac{\overline{z}}{\overline{z}'} = \dfrac{|z|^2}{|z'|^2}$. *On termine alors de la même façon qu'en 3.*

PROPOSITION 0.14 **Inégalités triangulaires**
Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$, on a

1. $\boxed{|z + z'| \leqslant |z| + |z'|}$.
2. $\boxed{\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z - z'|}$.

***Démonstration*** *Soient deux complexes $z$, $z' \in \mathbb{C}$.*

1. *On peut démontrer de manière géométrique la première inégalité triangulaire en remarquant que c'est une traduction, dans le cadre complexe, de celle vue pour le triangle en classe de cinquième. Si le point $M$ est l'image du complexe $z$ et le point $N$ l'image du complexe $z+z'$ dans $\mathscr{P}$, alors, dans le triangle $OMN$, $ON \leqslant OM + MN$. Comme $\operatorname{Aff}(\overrightarrow{MN}) = \operatorname{Aff}(N) - \operatorname{Aff}(M) = z + z' - z = z'$, on a $MN = |z'|$. Par ailleurs, $ON = |z+z'|$ et $OM = |z|$. On peut aussi démontrer cette première inégalité de manière algébrique. Développons le module au carré*
$$|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2$$
*En utilisant l'inégalité $\operatorname{Re}\left(z\overline{z'}\right) \leqslant |z||z'|$, on en tire que*
$$|z + z'|^2 \leqslant |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = \left(|z| + |z'|\right)^2$$
*et il suffit de prendre la racine carrée de ces nombres positifs.*
2. *Utilisons l'inégalité triangulaire déjà démontrée :*
$$|z| = |(z + z') + (-z')| \leqslant |z + z'| + |-z'| = |z + z'| + |z'|$$
*d'où $|z| - |z'| \leqslant |z + z'|$. On obtient de façon symétrique*
$$|z'| = |(z + z') + (-z)| \leqslant |z + z'| + |z|$$
*d'où également $|z'| - |z| \leqslant |z + z'|$. Puisque $|z| - |z'| \leqslant |z + z'|$ et que $-(|z| - |z'|) \leqslant |z + z'|$, on a bien $\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'|$.*

PROPOSITION 0.15
Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $A$ le point du plan d'affixe $a$. L'ensemble des points du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant

- $|z - a| = r$ est le cercle de centre $A$ et de rayon $r$.
- $|z - a| \leqslant r$ est le disque fermé de centre $A$ et de rayon $r$.
- $|z - a| < r$ est le disque ouvert de centre $A$ et de rayon $r$.

***Démonstration*** *Ces trois résultats proviennent de l'égalité* $|z-a| = AM$

## 1.5 Nombres complexes de module 1

### 1.5.1 Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

PROPOSITION 0.16 **Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1**
Nous noterons $\mathbb{U}$, l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1

$$\boxed{\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}}$$

Cet ensemble vérifie les propriétés suivantes.

1. $\mathbb{U}$ est *stable* pour le produit : $\forall z, z' \in \mathbb{U}, \quad z.z' \in \mathbb{U}$.
2. Le produit est *associatif* : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{U}, \quad (z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'')$.
3. Le complexe 1 est élément de $\mathbb{U}$ et est l'élément *neutre* du produit : $\forall z \in \mathbb{U}, \quad z \times 1 = 1 \times z = z$.
4. Si $z$ est élément de $\mathbb{U}$, alors son *inverse* $\dfrac{1}{z}$ aussi. De plus, on a $\boxed{\dfrac{1}{z} = \bar{z}}$.
5. Le produit est *commutatif* : $\forall z, z' \in \mathbb{U}, \quad z \times z' = z' \times z$.

On dit que $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe commutatif appelé *groupe des nombres complexes de module* 1.

***Démonstration*** *Soient* $z, z' \in \mathbb{U}$.

1. *On a :* $|z \times z'| = |z| \times |z'| = 1 \times 1 = 1$. *Donc* $z \times z' \in \mathbb{U}$.
2. *L'associativité est une conséquence directe de l'associativité de la multiplication dans* $\mathbb{C}$.
3. *On a :* $|1| = 1$ *donc* $1 \in \mathbb{U}$. *La suite est évidente.*
4. *On a :* $z \times \bar{z} = \bar{z} \times z = |z|^2 = 1$ *donc* $\bar{z}$ *est l'inverse de* $z$. *En utilisant les notations introduites précédemment, on obtient* $z^{-1} = 1/z = \bar{z}$.
5. *La commutativité est une conséquence directe de la commutativité de la multiplication dans* $\mathbb{C}$.

*Remarque 0.5* On verra dans l'exemple **??** page **??** une méthode plus rapide pour vérifier que $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe.

### 1.5.2 Exponentielle imaginaire

On suppose ici connues les propriétés élémentaires des fonctions cosinus et sinus ainsi que les différentes formules de trigonométrie circulaire. On pourra se reporter à ce sujet à l'annexe **??** paragraphe **??**. Ce paragraphe doit être parfaitement maîtrisé.

LEMME 0.17
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a^2 + b^2 = 1$. Il existe un réel (pas unique) $\theta$ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$.

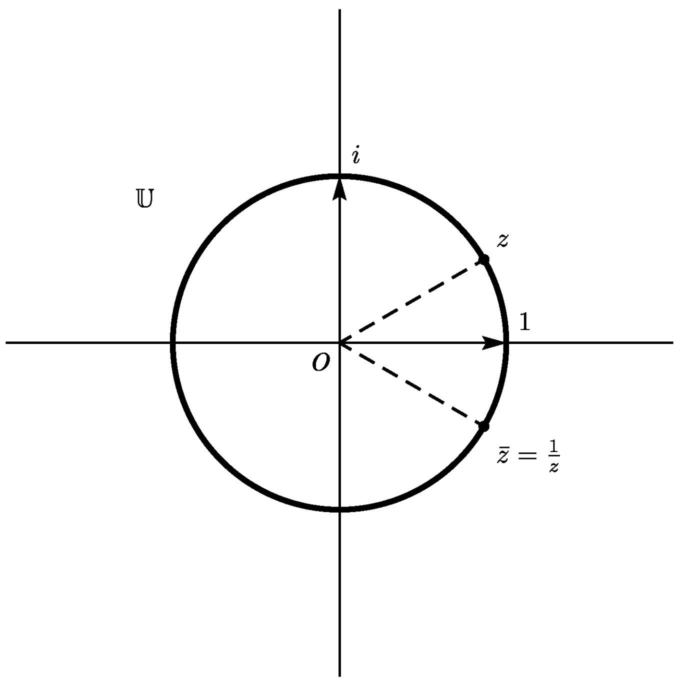



FIGURE 1 – groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

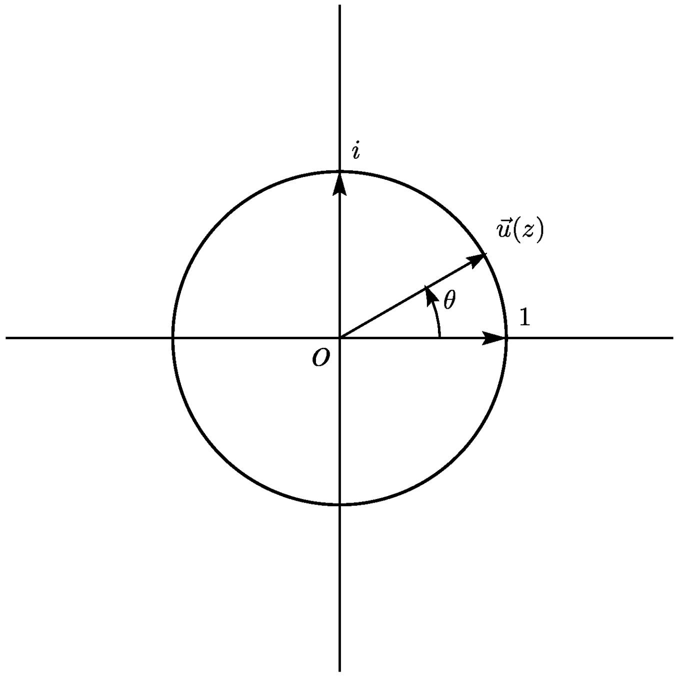



FIGURE 2 – Interprétation géométrique de la proposition 0.18

***Démonstration*** *Comme $a^2+b^2=1$, on a nécessairement $-1 \leqslant a \leqslant 1$ et $-1 \leqslant b \leqslant 1$. L'image de $\mathbb{R}$ par la fonction $\cos$ étant $[-1,1]$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\alpha = a$. Comme : $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$, il vient $\sin^2\alpha = b^2$. Une des deux égalités suivantes est alors vérifiée par $\alpha$, $\sin\alpha = b$ ou bien $\sin\alpha = -b$.*

- *Si la première est vraie, nous posons $\theta = \alpha$.*
- *Sinon, la seconde est alors vraie et nous posons $\theta = -\alpha$.*

*Dans les deux cas, le réel $\theta$ construit vérifie les deux égalités mentionnées dans l'énoncé du lemme.*

PROPOSITION 0.18
Pour tout complexe $z \in \mathbb{U}$, il existe un réel $\theta$ tel que $z = \cos\theta + i\sin\theta$.

***Démonstration*** *Soit $z = a+ib \in \mathbb{U}$. Par définition de $\mathbb{U}$, $a$ et $b$ vérifient $a^2+b^2=1$. Par application du lemme précédent, il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$. On a donc $z = \cos\theta + i\sin\theta$.*

*Remarque 0.6* Soit $z \in \mathbb{C}$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos\theta + i\sin\theta$. On rapporte le plan à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe $z$ alors $\theta$ est une mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{\imath}, \vec{u}}\right)$. Cette mesure est définie à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$).

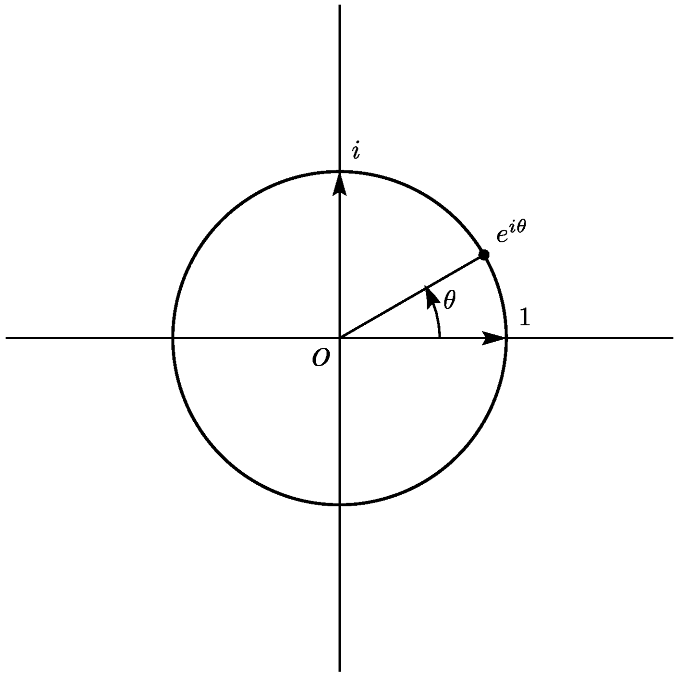



FIGURE 3 – $e^{i\theta}$

DÉFINITION 0.7 **Exponentielle imaginaire**
Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}$, nous appellerons *exponentielle imaginaire* de $\theta$ et nous noterons $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

*Remarque 0.7*

— Soit $z \in \mathbb{U}$. D'après la proposition 0.18, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.

— Réciproquement, tout nombre complexe de la forme $e^{i\theta}$ est de module 1. Donc

$$\boxed{\mathbb{U} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \exists\theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}\right\}}$$

*Remarque 0.8* La définition précédente est justifiée par l'égalité suivante, qui généralise la propriété fondamentale de l'exponentielle réelle $\forall a, b \in \mathbb{R},\ e^{a+b} = e^a e^b$.

Proposition 0.19 **Propriété de morphisme de l'exponentielle imaginaire**

$$\boxed{\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \quad e^{i\left(\theta+\theta'\right)} = e^{i\theta} e^{i\theta'}}$$

***Démonstration*** *Soient $\theta$, $\theta' \in \mathbb{R}$. On a :*

$$\begin{aligned} e^{i\left(\theta+\theta'\right)} &= \cos\left(\theta+\theta'\right) + i \sin\left(\theta+\theta'\right) && \textit{par définition de l'exponentielle d'un nombre imaginaire pur} \\ &= \left(\cos(\theta)\, \cos(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta')\right) + i \left(\cos(\theta)\, \sin(\theta') + \sin(\theta) \cos(\theta')\right) && \textit{par application des formules d'addition} \\ &= \left(\cos(\theta) + i \sin(\theta)\right) \left(\cos(\theta') + i \sin(\theta')\right) = e^{i\theta} \end{aligned}$$

*Remarque 0.9* Afin d'expliquer cette terminologie, explicitons ce qu'est un morphisme de groupes. Cette notion sera étudiée dans le paragraphe **??** du chapitre **??**. Soit $(G_1, \star_1)$ et $(G_2, \star_2)$ deux groupes. On dit qu'une application $\varphi$ de $G_1$ dans $G_2$ est un *morphisme* de groupes lorsque

$$\forall x, y \in G_1, \quad \varphi\left(x \star_1 y\right) = \varphi\left(x\right) \star_2 \varphi\left(y\right)$$

Nous pouvons alors reformuler la propriété précédente.

Proposition 0.20
La fonction exponentielle est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{U}, \times)$

*Remarque 0.10*
Avec les notations de la définition 0.9, on définit

- Le *noyau* du morphisme $\varphi$ comme étant le sous-ensemble de $G_1$ noté $\operatorname{Ker} \varphi$ donné par : $\operatorname{Ker} \varphi = \{x \in G_1 \mid \varphi\left(x\right) = e_2\}$ où $e_2$ est le neutre de $G_2$.
- L'*image* du morphisme $\varphi$ comme étant le sous-ensemble de $G_2$ noté $\operatorname{Im} \varphi$ donné par : $\operatorname{Im} \varphi = \{\varphi\left(x\right) \mid x \in G_1\}$.

Notre morphisme de groupes

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*, \times)\theta \\ \longmapsto & e^{i\theta} & \end{array} \right.$$

a pour noyau $\boxed{\operatorname{Ker} \varphi = 2\pi\mathbb{Z}}$ et pour image $\boxed{\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{U}}$.

Proposition 0.21
Soient $\theta$ et $\theta'$ deux réels, on a $\boxed{e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \theta' + 2k\pi}$

***Démonstration*** *Si $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ alors $e^{i\left(\theta-\theta'\right)} = 0$ et $\theta - \theta' = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Par conséquent $\theta = \theta' + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. La réciproque est évidente.*

*Remarque 0.11* $e^{i\times 0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = 1$, $e^{i\pi} = -1$. Cette dernière égalité, écrite sous la forme $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$ est connue sous le nom de « *Relation d'Euler* ». Elle est remarquable car elle lie cinq nombres fondamentaux en mathématiques $e, i, \pi, 1$ et $0$.

COROLLAIRE 0.22

Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}}}$

***Démonstration*** *En effet, si $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = e^{i\times 0} = 1$. Par conséquent, l'inverse du nombre complexe $e^{i\theta}$ est $e^{-i\theta}$. Comme $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$, par application de la proposition 0.16, l'inverse de $e^{i\theta}$ est aussi $\overline{e^{i\theta}}$, d'où les deux égalités ci-dessus.*

THÉORÈME 0.23 **Formules d'Euler**

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

***Démonstration*** *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :*

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases}$$

*En additionnant la première équation à la deuxième et en divisant les deux membres de l'égalité obtenue par 2, on obtient la formule annoncée pour $\cos\theta$. De même, en soustrayant la deuxième équation à la première et en divisant les deux membres de l'égalité obtenue par $2i$, on obtient la formule annoncée pour $\sin\theta$.*

**Leonhard Euler, né le 15 avril 1707 à Bâle et mort le 18 septembre 1783 à Saint-Pétersbourg.**

 *Peu après sa naissance les parents d'Euler déménagent à Riehen. Le père d'Euler est un ami de la famille Bernoulli et Jean Bernoulli, dont Euler profita des leçons, est alors considéré comme le meilleur mathématicien européen. Le père d'Euler souhaite que Leohnard devienne comme lui pasteur mais Jean Bernoulli qui a remarqué les aptitudes remarquables de son élève, le convainc qu'il est destiné aux mathématiques. Après ses études à Bâle, il obtient un poste à Saint-Pétersbourg en 1726 qu'il quitte pour un poste à l'académie de Berlin en 1741. Malgré la qualité de ses contributions à l'académie, il est contraint de la quitter en raison d'un conflit avec Frédéric II. Voltaire qui était bien vu par le roi avait des qualités rhétoriques qu'Euler n'avait pas et dont il fut la victime. En 1766, il retourne à Saint-Pétersbourg où il décéda en 1783.*

*Euler souffrit tout au long de sa vie de graves problèmes de vue. Fait remarquable, il effectua la plus grande partie de ses découvertes lors des dix-sept dernières années de sa vie, alors qu'il était devenu aveugle. Il fut, avec* 886 *publications, un des mathématiciens les plus prolifiques de tous les temps. Il est à l'origine de multiples contributions en analyse (nombres complexes, introduction des fonctions logarithmes et exponentielles, détermination de la somme des inverses des carrés d'entiers, introduction de la fonction gamma, invention du calcul des variations, ...), géométrie (cercle et droite d'Euler d'un triangle, formule liant le nombre de faces, d'arêtes et de sommets d'un polyèdre, ...), théorie des nombres (fonction indicatrice d'Euler, ...), théorie des graphes (problème des sept ponts de Königsberg) ou même en physique (angles d'Euler, résistance des matériaux, dynamique* *des fluides... ) et en astronomie (calcul de la parallaxe du soleil,...).*

PROPOSITION 0.24 **Formule de Moivre**

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \boxed{e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n}$$

***Démonstration*** *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrons d'abord par récurrence la propriété pour $n \in \mathbb{N}$.*

— *Si $n = 0$, on a : $e^{i\times 0} = 1 = \left(e^{i\theta}\right)^0$. L'égalité est donc vraie au rang 0.*

— *Supposons l'égalité vraie au rang $n$ et démontrons-la au rang $n+1$ :*

$$\begin{aligned} e^{i(n+1)\theta} &= e^{i(n\theta+\theta)} \\ &= e^{i\theta}e^{in\theta} \text{ car exp est un morphisme de groupes} \\ &= e^{i\theta}\left(e^{i\theta}\right)^n \text{ par hypothèse de récurrence } = \left(e^{i\theta}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

*Démontrons maintenant la propriété pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. On a alors $-n \in \mathbb{N}$ et on peut appliquer la relation que nous venons de prouver à l'entier $-n$. Cela donne : $e^{i\,(-n)\,\theta} = \left(e^{-i\theta}\right)^n$. Mais d'après la proposition 0.22, on a $e^{i\,(-n)\,\theta} = e^{-in\theta} = \dfrac{1}{e^{in\theta}}$ et $\left(e^{-i\theta}\right)^n = \left(\dfrac{1}{e^{i\theta}}\right)^n$, donc $\dfrac{1}{e^{in\theta}} = \left(\dfrac{1}{e^{i\theta}}\right)^n$ et l'on a bien $e^{i\,n\,\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$. La relation est alors démontrée pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Les formules suivantes interviennent souvent dans les exercices.

PROPOSITION 0.25 **Factorisation par les angles moitiés**

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ :

$$\boxed{e^{ix}+1 = e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}} + e^{-\frac{ix}{2}}\right) = 2e^{\frac{ix}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \boxed{e^{ix}-1 = e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}\right) = 2ie^{\frac{ix}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

*Remarque 0.12* On a la factorisation de l'angle moitié plus générale (voir figure 5) :

$$e^{ix}+e^{iy} = e^{\frac{i(x+y)}{2}}\left(e^{\frac{i(x-y)}{2}} + e^{-\frac{i(x-y)}{2}}\right) = 2e^{i\frac{x+y}{2}}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

**Abraham de Moivre né le 26 mai 1667 à Vitry-le-François et mort le 27 novembre 1754 à Londres.** *Abraham de Moivre est un mathématicien français qui vécut la plus grande partie de sa vie en exil à Londres en raison de la révocation de l'Edit de Nantes. Il fut l'auteur de deux ouvrages majeurs en mathématiques. Le premier, consacré aux probabilités* "Doctrine of chance"*et paru en 1718, s'intéresse en particulier au calcul des probabilités d'un événement aléatoire dépendant d'autres événements aléatoires ainsi qu'aux problèmes de convergence des variables aléatoires. Le second,* "Miscellanea Analytica"*, paru en 1730, est un ouvrage d'analyse dans lequel figure pour la première fois la fameuse « formule de Stirling ». On raconte cette histoire au sujet de sa mort. Il*

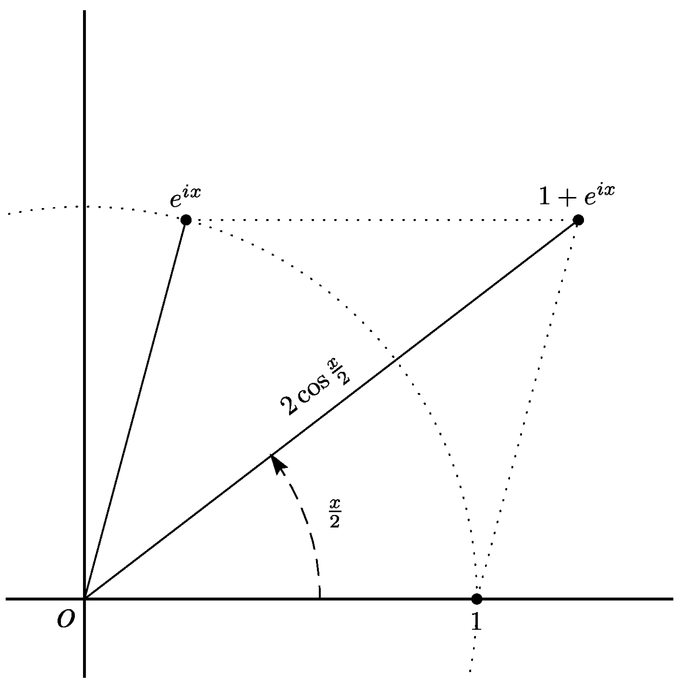



FIGURE 4 – $e^{ix}+e^{iy}=2e^{i\frac{x+y}{2}}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

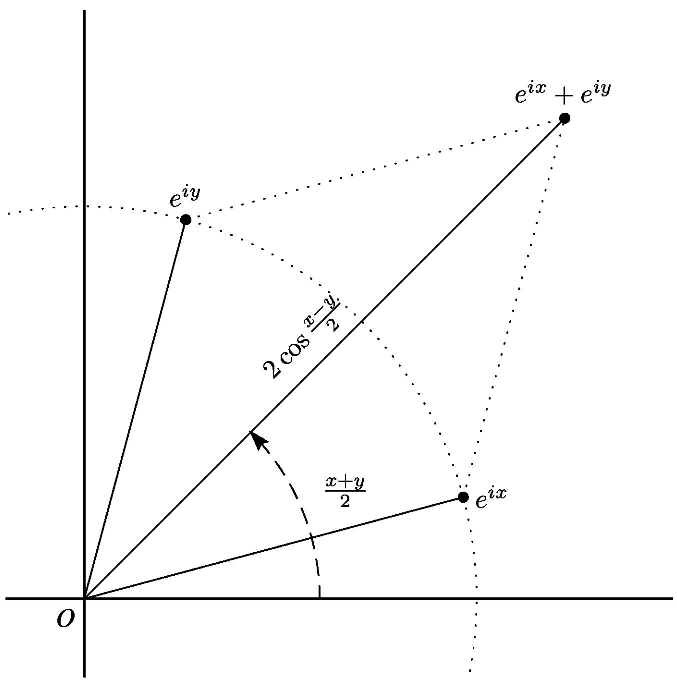
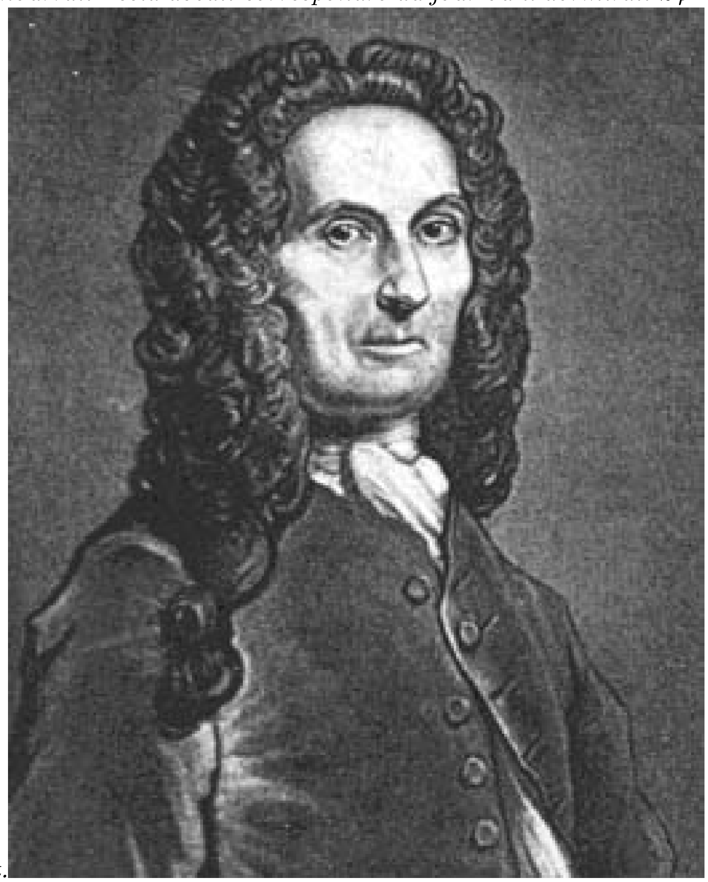



FIGURE 5 – $e^{ix} + e^{iy} = 2e^{i\frac{x+y}{2}} \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

*s'était rendu compte qu'il dormait un quart d'heure de plus chaque nuit. En utilisant cette suite arithmétique, il avait calculé à quelle date il mourrait : cela devait correspondre au jour où il dormirait 24*



*heures. Ce fut exactement ce qu'il advint.*

## 1.6 Argument, fonction exponentielle complexe

### 1.6.1 Argument d'un nombre complexe

PROPOSITION 0.26 **Argument d'un nombre complexe, Argument principal d'un nombre complexe**

Soit $z$ un nombre complexe *non nul*. Il existe au moins un nombre réel $\theta$ tel que $\boxed{z = \rho e^{i\theta}}$ où $\rho = |z| \in \mathbb{R}_+^*$ est le module de $z$.

- $\rho e^{i\theta}$ est une *forme trigonométrique* de $z$.
- Le réel $\theta$ est appelé *un argument de $z$*.

Un tel nombre n'est pas unique : si $\theta_0$ est un argument de $z$, l'ensemble de tous les arguments de $z$ est donné par $\{\theta_0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. On notera $\arg(z) = \theta_0\,[2\pi]$. Enfin, il existe un unique argument de $z$ appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On l'appellera *l'argument principal* de $z$.

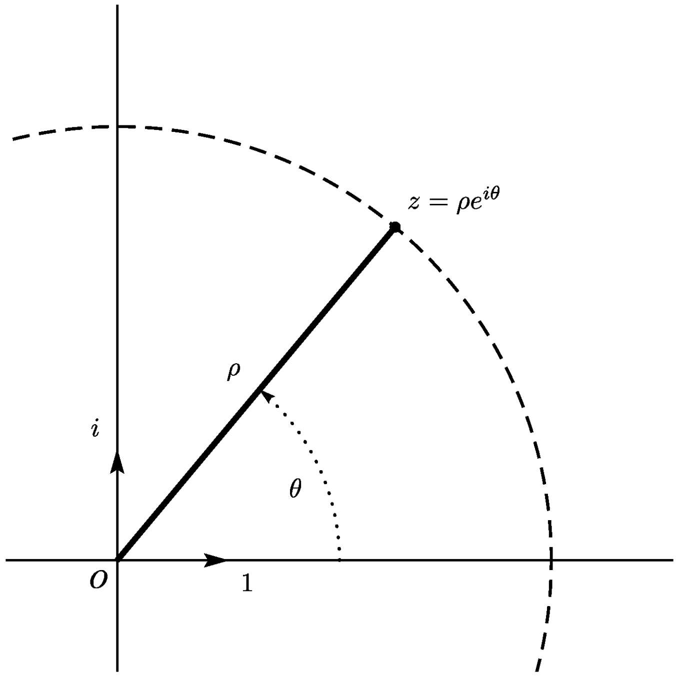



FIGURE 6 – Représentation trigonométrique d'un nombre complexe

***Démonstration*** *Soit $z$ un nombre complexe non nul. Posons $\rho = |z| \neq 0$, on a alors $z/\rho \in \mathbb{U}$. D'après la remarque 0.7, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $z/\rho = e^{i\theta}$ ce qui prouve l'existence d'un argument de $z$. Si $\theta' \in \mathbb{R}$ est un autre argument de $z$, on a bien : $\theta' \equiv \theta\,[2\pi]$. En effet, en partant de $z = e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ et en utilisant la proposition 0.21, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta' = \theta + 2k\pi$.*

*Exemple 0.5* On a :

$$\arg 1 \equiv 0\,[2\pi] \quad \arg i \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \quad \arg -1 \equiv \pi\,[2\pi] \quad \arg -i \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$

PLAN 0.1 : Comment calculer le module et un argument d'un nombre complexe donné

*Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ d'argument $\theta \in \mathbb{R}$ et de module $\rho \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimons $\rho$ et $\theta$ en fonction de $a$ et $b$ :*

— *On a $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$*

— *Comme $z = a + ib = \rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = \rho\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, on cherche un unique réel $\theta \in ]-\pi, \pi]$ vérifiant $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.*

PROPOSITION 0.27 **Produit et quotient de deux nombres complexes sous forme trigonométrique**

Soient deux nombres complexes non nuls : $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$,

1. $\boxed{zz' = \rho\rho' e^{i\left(\theta+\theta'\right)}}$

2. $\boxed{\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i\left(\theta-\theta'\right)}}$.

***Démonstration*** *C'est une conséquence directe de la proposition 0.19.*

COROLLAIRE 0.28
Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes non nuls. On a :

1. $\boxed{\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi]}$
2. $\boxed{\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \ [2\pi]}$.
3. $\boxed{\arg(\bar{z}) = \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) \ [2\pi]}$

***Démonstration*** *Démontrons la première égalité, la démonstration des deux suivantes est identique. Notons $\theta$ (respectivement $\theta'$) un argument de $z$ (respectivement de $z'$) et $\rho$ (respectivement $\rho'$) le module de $z$ (de $z'$). Par application de la propriété précédente, $zz' = \rho\rho' e^{i\left(\theta+\theta'\right)}$. Par conséquent* $\arg(zz') = \theta + \theta' \ [2\pi] = \arg z + \arg z' \ [2\pi]$.

PROPOSITION 0.29
$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}^*$, $\boxed{\arg(z^n) = n \arg(z) \ \ ([2\pi])}$

***Démonstration*** *Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}^*$. L'écriture trigonométrique de $z$ est $z = \rho e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de $z$ et $\rho$ est le module de $z$. On a donc : $z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n \left(e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$ par application de la formule de Moivre. Par conséquent,* $\arg(z^n) = n\theta \ ([2\pi]) = n\arg(z) \ [2\pi]$.

### 1.6.2 Fonction exponentielle complexe

On suppose ici connues les propriétés de la fonction exponentielle réelle. On pourra à ce sujet consulter le paragraphe **??**.

DÉFINITION 0.8 **Fonction exponentielle complexe**
Soit $z = a + i\,b$ un nombre complexe. On appelle exponentielle de $z$ le nombre complexe

$$\boxed{e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib}}$$

La fonction qui à tout nombre complexe $z$ associe le nombre complexe $e^z$ ainsi définie s'appelle *fonction exponentielle complexe.*

*Remarque 0.13*

— Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On a $e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a[\cos b + i \sin b]$

— Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On a $|e^z| = \left|e^a e^{ib}\right| = |e^a|\left|e^{ib}\right| = |e^a| = e^a$ car la fonction exponentielle réelle est strictement positive.

— La fonction exponentielle complexe ne s'annule jamais : $|e^z| = e^a \neq 0$. La fonction exponentielle complexe est donc à image dans $\mathbb{C}^*$.
— La fonction exponentielle complexe prolonge la fonction exponentielle réelle ( ce qui signifie que sa restriction aux nombres réels coïncide avec la fonction exponentielle réelle).
— Si $Z$ est un complexe non nul, on peut l'écrire sous forme trigonométrique $Z = \rho e^{i\theta}$. Un complexe $z = a + ib$ vérifie $e^z = Z$ si et seulement si $e^a e^{ib} = \rho e^{i\theta}$. En prenant le module, on trouve que $\boxed{a = \ln(\rho)}$ puis ensuite $\boxed{b = \theta + 2k\pi}$, $(k \in \mathbb{Z})$.
— La fonction exponentielle complexe $\begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}[\star]z \\ \longmapsto & e^z \end{cases}$ est surjective (Voir la définition **??** page **??**) mais pas injective (Voir la définition **??** page **??**). Il sera impossible à notre niveau de définir un logarithme complexe.

Proposition 0.30 **La fonction exponentielle complexe est un morphisme du groupe $(\mathbb{C}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$**

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad \boxed{e^{z+z'} = e^z e^{z'}} \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \boxed{\left(e^z\right)^{-1} = \left(e^{-z}\right)}$$

***Démonstration***

— *Soient $z = a+ib, z' = a'+ib' \in \mathbb{C}$. En utilisant les propriétés de l'exponentielle réelle et imaginaire, $e^z e^{z'} = e^a e^{ib} e^{a'} e^{ib'} = e^{a+a'} e^{i(b+b')} = e^{z+z'}$.*
— *Soit $z \in \mathbb{C}$. Par application de la propriété précédente, $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$. Par conséquent, $e^{-z}$ est l'inverse de $e^z$ et $\left(e^z\right)^{-1} = \left(e^{-z}\right)$.*

Vous pouvez maintenant étudier l'appendice **??** pour des applications très importantes de l'exponentielle imaginaire aux calculs trigonométriques. Avant cela, il est conseillé de lire l'appendice **??** pour vous familiariser avec les techniques de calcul de sommes et à la notation $\sum$.

## 1.7 Racines $n$-ièmes de l'unité

Dans tout ce paragraphe $n$ désigne un entier naturel non nul : $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 0.9 **Racine $n$-ième d'un nombre complexe**
Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle *racine $n$-ième du nombre complexe $z$* tout nombre complexe $\xi$ vérifiant $\boxed{\xi^n = z}$.

*Exemple 0.6* $i$ est une racine deuxième de $-1$, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine cubique de 1, $i\sqrt{2}$ est une racine deuxième de $-2$.

Définition 0.10 **Racine $n$-ième de l'unité**
On appelle *racine $n$-ième de l'unité* une racine $n$-ième de 1, c'est-à-dire un nombre complexe $z$ tel que $\boxed{z^n = 1}$. On notera $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n$-ièmes de l'unité : $\boxed{\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}}$.

*Remarque 0.14*

— Pour tout $n \geqslant 1$, on a : $1 \in \mathbb{U}_n$ et $-1 \in \mathbb{U}_n$ si et seulement si $n$ est pair.

— On a $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$. En effet, si $z \in \mathbb{U}_n$ alors $z^n = 1$ et donc $|z|^n = |z^n| = 1$. Comme $|z| \in \mathbb{R}_+^*$, cette égalité n'est possible que si $|z| = 1$.

✎ *Notation 0.7* Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leqslant n$. On note $[\![m, n]\!]$ l'intervalle d'entiers donné par :

$$[\![m, n]\!] = \{k \in \mathbb{Z} \mid m \leqslant k \leqslant n\}.$$

PROPOSITION 0.31 **Les racines $n$-ièmes de l'unité sont de la forme $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ où $k \in [\![0, n-1]\!]$**

Notons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Il y a exactement $n$ racines $n$-ièmes de l'unité. Elles sont données par les puissances de $\omega$ : $\omega^k$ où $k \in [\![0, n-1]\!]$

$$\boxed{\mathbb{U}_n = \left\{\omega^k \;\mid\; k \in [\![0, n-1]\!]\right\} = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \;\mid\; k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}$$

***Démonstration*** *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$. En prenant le module, on en déduit que $|z| = 1$. Il existe donc un unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$. On doit alors avoir $e^{in\theta} = 1$, c'est-à-dire $n\theta = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme on veut $\theta \in [0, 2\pi[$, on doit avoir $0 \leqslant k < n$ et donc $k \in [\![0, n-1]\!]$ d'où $z = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \omega^k$. Réciproquement, tout complexe de cette forme vérifie bien $z^n = 1$.*

PROPOSITION 0.32 **$(\mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe commutatif**

L'ensemble $\mathbb{U}_n$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{U}_n$ est *stable* pour le produit (c-a-d : $\forall \xi, \xi' \in \mathbb{U}_n, \quad \xi \times \xi' \in \mathbb{U}_n$).
2. Le produit est *associatif* (c-a-d : $\forall \xi, \xi', \xi'' \in \mathbb{U}_n, \quad (\xi \times \xi') \times \xi'' = \xi \times (\xi' \times \xi'')$).
3. Le complexe 1 est élément de $\mathbb{U}_n$ et est l'élément *neutre* du produit (c-a-d : $\forall \xi \in \mathbb{U}_n, \quad \xi \times 1 = 1 \times \xi = \xi$).
4. Si $\xi$ est élément de $\mathbb{U}_n$, alors son *inverse* $\dfrac{1}{\xi}$ aussi. De plus, on a :
$$\frac{1}{\xi} = \bar{\xi}$$
5. Le produit est *commutatif* (c-a-d : $\forall \xi, \xi' \in \mathbb{U}_n, \quad \xi \times \xi' = \xi' \times \xi$).

$(\mathbb{U}_n, \times)$ est donc muni d'une structure de groupe commutatif.

***Démonstration*** *Soient $\xi, \xi' \in \mathbb{U}_n$ :*

1. *On a : $(\xi \times \xi')^n = \xi^n \times \xi'^n = 1$. Donc $\xi \times \xi' \in \mathbb{U}_n$.*
2. *L'associativité est une conséquence directe de l'associativité du produit dans $\mathbb{C}$.*

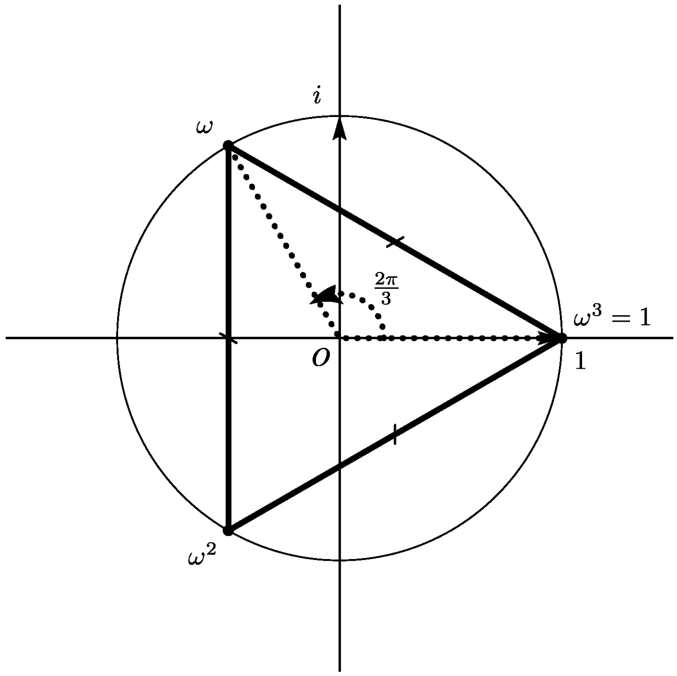



FIGURE 7 – $\mathbb{U}_4$

3. *On a : $1^n = 1$ donc $1 \in \mathbb{U}_n$. La suite est évidente.*
4. *Remarquant tout d'abord que $\overline{\xi}^n = \overline{\xi^n} = 1$. Donc $\overline{\xi} \in \mathbb{U}_n$. De plus : $\xi \times \overline{\xi} = \overline{\xi} \times \xi = 1$ car $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$. Par conséquent, $\xi^{-1} = 1/\xi = \bar{\xi}$.*
5. *La commutativité est une conséquence directe de la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{C}$.*

*Remarque 0.15* En fait, $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$ qui lui-même est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$. Nous verrons là aussi plus tard comment prouver la propriété précédente de manière plus rapide (voir **??** page **??**). L'application $\theta : \mathbb{U} \to \mathbb{U}, z \mapsto z^n$ est un morphisme de groupe de noyau $\mathbb{U}_n$.

PROPOSITION 0.33 **La somme des racines $n$-ièmes de l'unité est nulle**

Soit un entier $n \geqslant 2$. On a : $\boxed{1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = \sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = 0}$.

***Démonstration*** *On utilise la formule d'une somme géométrique de raison $\omega \neq 1$ et $\omega^n = 1$ :*

$$1 + \omega + \cdots + \omega^{n-1} = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0.$$

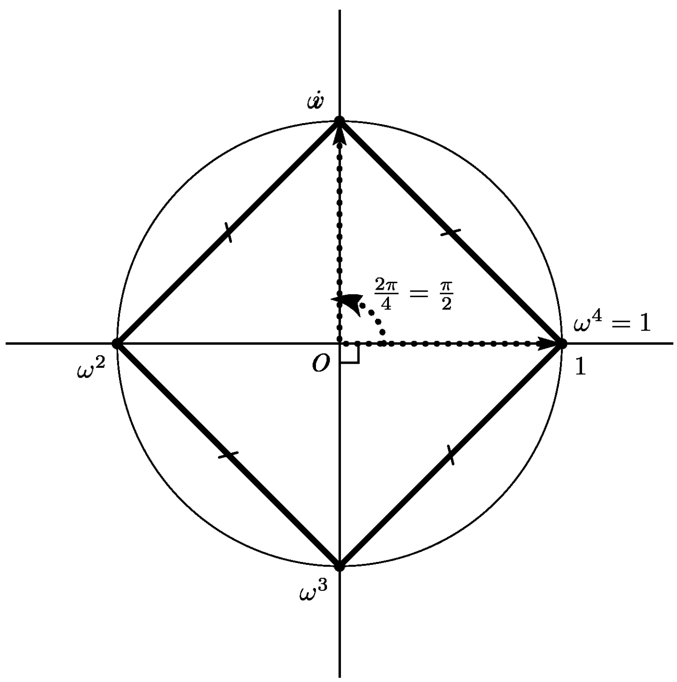



FIGURE 8 – $\mathbb{U}_4$

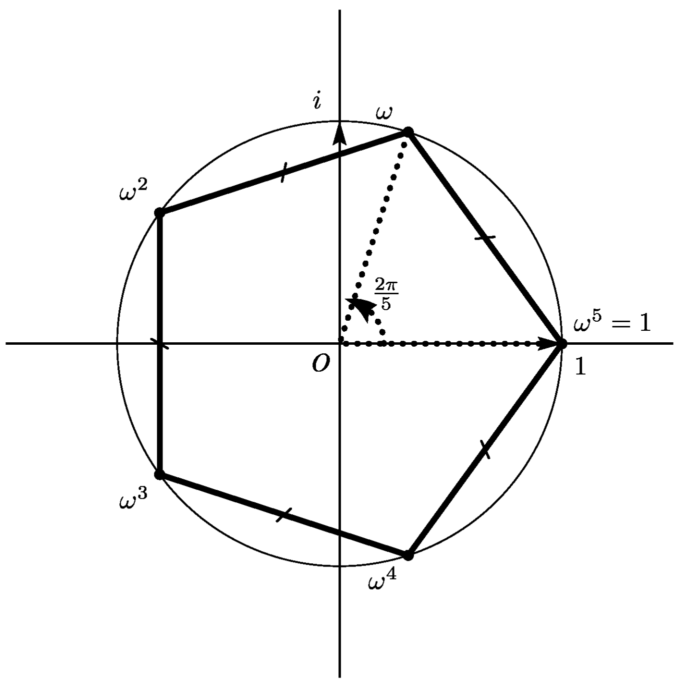



FIGURE 9 – $\mathbb{U}_6$

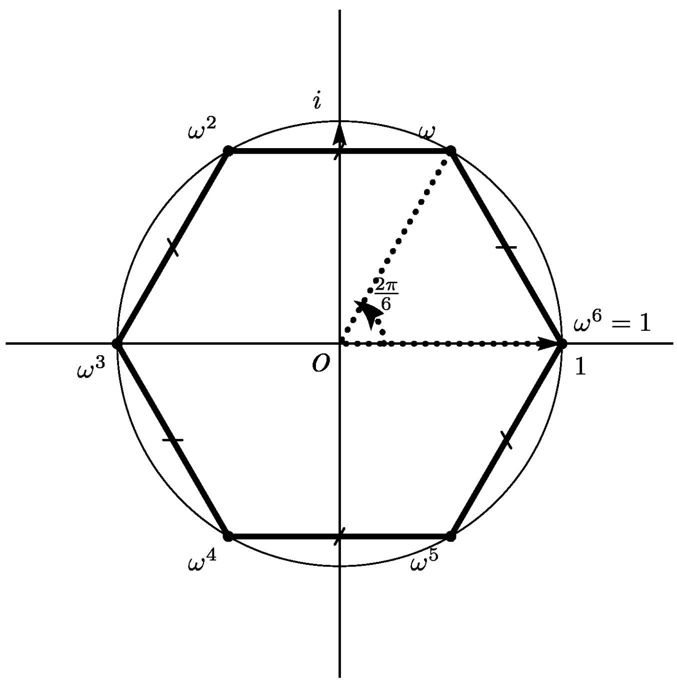



FIGURE 10 – $\mathbb{U}_6$

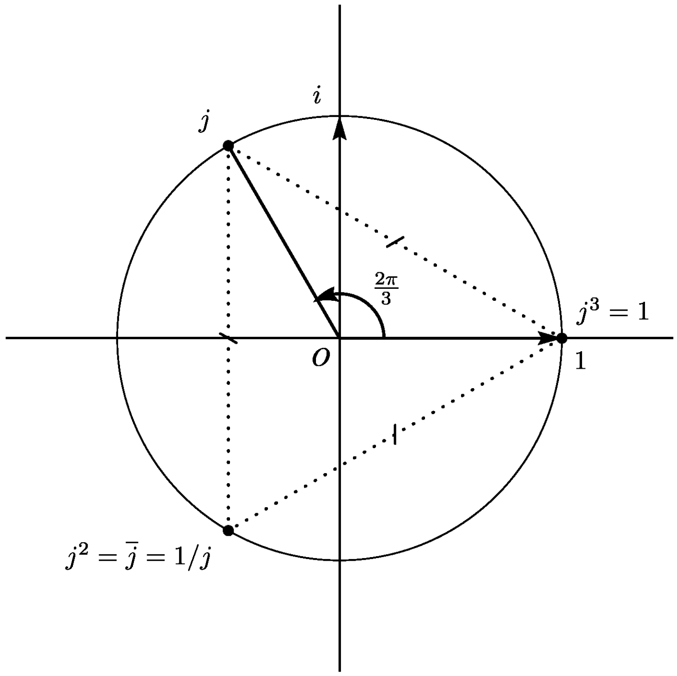



FIGURE 11 – Racines cubiques de l'unité

*Remarque 0.16* On utilisera très souvent les racines cubiques de l'unité. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. C'est une racine cubique primitive de l'unité au sens où $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$. Les puissances de $j$ sont simples à calculer :

$$j^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 3p \\ j & \text{si } k = 3p + 1 j^2 \\ & \text{si } k = 3p + 2 \end{cases}$$

Les propriétés suivantes interviennent souvent : $\boxed{j^2 = \overline{j} = 1/j}$ et $\boxed{1 + j + j^2 = 0}$.

PROPOSITION 0.34 **Expression des racines $n$-ièmes d'un nombre complexe**
Un complexe *non nul* $z = \rho e^{i\theta}$ admet $n$ racines $n$-ièmes données par

$$\boxed{Z_k = \rho^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = \rho^{1/n} e^{i\theta/n} \omega^k, \quad k \in [\![0, n-1]\!]}.$$

où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ ou toute autre racine $n$-ième primitive de l'unité.

***Démonstration*** *Notons $Z_0 = \rho^{1/n} e^{i\theta/n}$. On a bien $Z_0^n = z$ et donc $Z^n = z$ si et seulement si $(Z/Z_0)^n = 1$ c'est-à-dire si et seulement si $(Z/Z_0)$ est une racine $n$-ième de l'unité.*

On pourra consulter plus tard l'annexe **??** paragraphe **??** afin de voir le rôle des racines de l'unité dans la factorisation de certains polynômes.

## 1.8 Équations du second degré

### 1.8.1 Racines carrées

DÉFINITION 0.11 **Racine carrée d'un nombre complexe**
Soit un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$. On appelle racine carrée de $z$ une racine deuxième de $z$, c'est-à-dire un complexe $Z$ vérifiant $Z^2 = z$.

Par application de la proposition 0.34, on peut affirmer :

PROPOSITION 0.35
Tout nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées. De plus, ces deux racines carrées sont opposées l'une de l'autre.

⚠ *Attention 0.8* La notation $\sqrt{z}$ n'a de sens que pour $z \in \mathbb{R}_+$. Si on l'utilise à mauvais escient, on aboutit vite à des absurdités. Par exemple : $-1 = \sqrt{-1}^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{1} = 1$.

*Remarque 0.17*

- Le complexe nul $z = 0$ ne possède qu'une seule racine carrée 0.
- Si $x \in \mathbb{R}_+$, ses deux racines carrées sont données par $\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$.
- Si $x \in \mathbb{R}_-^*$, ses deux racines carrées sont données par $i\sqrt{|x|}$ et $-i\sqrt{|x|}$. En effet, la forme trigonométrique de $x$ est $x = |x|\, e^{i\pi}$. D'après la proposition 0.34, les deux racines carrées de $x$ sont $\sqrt{|x|}e^{i\pi/2} = i\sqrt{|x|}$ et $\sqrt{|x|}e^{\pi/2}e^{2\pi/2} = -i\sqrt{|x|}$.

Pour calculer en pratique les racines carrées d'un nombre complexe $z$, le plus simple consiste souvent à mettre $z$ sous forme trigonométrique et à appliquer les formules précédentes. On dispose également d'une méthode permettant de calculer les parties réelles et imaginaires des racines carrées de $z$.

PLAN 0.2 : Comment calculer les racines carrées d'un nombre complexe

*Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Soit $Z = X + iY$ une des deux racines carrées de $z$. Comme $Z^2 = z$, on a :*

$$\begin{cases} |Z|^2 = |z| \\ \operatorname{Re} Z^2 = \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} Z^2 = \operatorname{Im} z \end{cases} .$$

*On en déduit*

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ X^2 - Y^2 = a \\ 2XY = b \end{cases} .$$

*Et en particulier*

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ X^2 - Y^2 = a XY \text{ est du signe de } b \end{cases}.$$

*Exemple 0.9* Calculons les racines carrées de $z = 8-6i$. Soit $Z = X+iY$ une des deux racines carrées de $z$. Les réels $X$ et $Y$ satisfont

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = \sqrt{100} = 10 \\ X^2 - Y^2 = 8XY \text{ est négatif} \end{cases}$$

Par addition des deux premières équations, on obtient : $X = 3$ ou $X = -3$. Par soustraction de ces deux mêmes équations, on obtient : $Y = 1$ ou $Y = -1$. Comme le produit $XY$ est négatif, les seules possibilités sont $X = 3$ et $Y = -1$ ou alors $X = -3$ et $Y = 1$. En conclusion, $Z = 3-i$ ou $Z = -3+i$. On vérifie au brouillon que ces deux complexes vérifient bien $Z^2 = 8-6i$.

### 1.8.2 Équations du second degré

Théorème 0.36 **Résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes**
Soient $a$, $b$, $c$ trois nombres complexes avec $a \neq 0$. Considérons l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (\star)$$

Notons $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ le *discriminant* de l'équation $(\star)$. On a :

- Si $\Delta = 0$, l'équation $(\star)$ admet une racine double $z_0$ donnée par : $\boxed{z_0 = \dfrac{-b}{2a}}$.
- Si $\Delta \neq 0$ et si $\delta$ désigne une des deux racines carrées de $\Delta$ alors l'équation $(\star)$ admet deux racines distinctes $z_1$ et $z_2$ données par : $\boxed{z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}}$ et $\boxed{z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}}$.

***Démonstration*** *Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de l'équation $(\star)$. Puisque $a \neq 0$, nous pouvons écrire le trinôme sous forme canonique*

$$0 = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

*En notant $Z = z + b/2a$, on doit avoir $Z^2 = \Delta/4a^2$.*

- *Si $\Delta = 0$, alors $Z = 0$ c'est-à-dire $z = -b/(2a)$.*
- *Si $\Delta \neq 0$, en notant $\delta$ une racine carrée complexe de $\Delta$, $(Z-\delta)(Z+\delta) = 0$ c'est-à-dire $Z = \pm\delta$ ou encore $z = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ ou $z = \dfrac{-b+\delta}{2a}$.*

*On vérifie dans chacun des cas précédents que $z$ est effectivement solution de l'équation.*

Corollaire 0.37 **Résolution d'une équation du second degré à coefficients réels**
Soient $a$, $b$, $c$ trois nombres réels avec $a \neq 0$. Considérons l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{C}$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\star)$$

Notons $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ son discriminant. Remarquons que $\Delta \in \mathbb{R}$. On a :

— Si $\Delta > 0$, $(\star)$ admet deux solutions distinctes, toutes deux réelles $x_1$ et $x_2$ données par

$$\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

— Si $\Delta = 0$, $(\star)$ admet une seule solution $x_0$ donnée par :

$$\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}}$$

— Si $\Delta < 0$, $(\star)$ admet deux solutions distinctes, toutes deux *complexes conjuguées* $x_1$ et $x_2$ données par

$$\boxed{x_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}}$$

***Démonstration***

— *Si $\Delta \geqslant 0$, une racine de $\Delta$ est donnée par $\delta = \sqrt{\Delta}$ et les formules pour $x_0$, $x_1$ et $x_2$ se déduisent de celles énoncées dans le théorème 0.36.*

— *Si $\Delta < 0$, une racine de $\Delta$ est donnée, d'après la remarque 0.17 par $\delta = i\sqrt{|\Delta|}$. D'après les formules énoncées dans le théorème 0.36, les deux racines de $(\star)$ sont $x_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ qui sont bien complexes et conjuguées.*

On pourra se reporter à l'annexe **??** paragraphe **??** pour des précisions supplémentaires sur les trinômes du second degré et au paragraphe **??** pour des applications des relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme.

## 1.9 Nombres complexes et géométrie plane

### 1.9.1 Distance

Proposition 0.38
Soient $A$ et $B$ deux points du plan d'affixes respectives $a$ et $b$. La distance de $A$ à $B$ est donnée par $\boxed{AB = |b - a|}$

***Démonstration*** *L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donnée par $\text{Aff}(B) - \text{Aff}(A)$. De plus, par définition, $|b - a| = ||\overrightarrow{AB}|| = AB$.*

### 1.9.2 Barycentre

**Proposition 0.39**
Soient $A$, $B$ et $G$ trois points d'affixes respectives $a, b$ et $g$ ; Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels tels que $\alpha+\beta \neq 0$. Alors, $G$ est le barycentre des points $A$ et $B$ affectés respectivement des poids $\alpha$ et $\beta$ si et seulement si

$$\boxed{\alpha(g-a)+\beta(g-b)=0.}$$

***Démonstration*** *C'est une traduction en terme d'affixe de l'égalité vectorielle $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ qui définit le barycentre $G$.*

*Remarque 0.18* Si $\alpha=\beta=1$, le point $G$ est le milieu du segment $[AB]$. On a alors, avec les notations précédentes, l'égalité $g=(a+b)/2$.

**Proposition 0.40**
Soient $n \geqslant 2$ un entier, $A_1, \dots, A_n$ des points du plan d'affixes respectives $z_1, \dots, z_n$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Le point $G$ est le barycentre des points $A_i$ affectés des poids $\alpha_i$, $i=1, \dots, n$ si et seulement si son affixe $z$ vérifie l'équation

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(z_i-z)=0}$$

***Démonstration*** *C'est une traduction en terme d'affixe de l'égalité vectorielle $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{GA_i}=\overrightarrow{0}$.*

### 1.9.3 Angles

**Proposition 0.41**
Soient $A$, $B$, et $C$ trois points du plan tels que $C$ est distinct de $A$ et de $B$, d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$. Une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ est alors donnée par $\boxed{(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})=\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)\ [2\pi]}$

***Démonstration*** *Remarquons tout d'abord que $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)=\arg(b-c)-\arg(a-c)\ [2\pi]$. Par ailleurs $b-c=\operatorname{Aff}(\overrightarrow{BC})$ et $a-c=\operatorname{Aff}(\overrightarrow{CA})$. Donc $\arg(b-c)=(\widehat{\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{CB}})$ et $\arg(a-c)=(\widehat{\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{CA}})$. On conclut en utilisant la relation de Chasles pour les angles $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})=(\widehat{\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{CB}})-(\widehat{\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{CA}})\ [2\pi]$.*

Corollaire 0.42
Soient $A$, $B$, et $C$ trois points du plan tels que $C$ est distinct de $A$, d'affixes respectives $a$, $b$ et $c$.

— $A$, $B$, et $C$ sont alignés si et seulement si $\dfrac{c-b}{c-a}$ est réel.

— Les droites $(CA)$ et $(CB)$ sont perpendiculaires si et seulement si $\dfrac{c-b}{c-a}$ est imaginaire pur.

## 1.10 Transformations remarquables du plan

On notera $\mathscr{P}$ le plan et $\mathscr{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan. On appelle *transformation du plan* toute application bijective du plan dans lui-même. À toute transformation $f$ du plan, on peut associer une application $g$ du plan complexe dans lui-même qui au complexe $z$ d'image le point $M \in \mathscr{P}$ associe l'affixe du point $f(M)$ :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\ \mathrm{Aff}(M) \\ \longmapsto & \mathrm{Aff}(M') & \end{array} \right. \quad \text{où } M' = f(M).$$

On dit alors que $g$ *représente l'application* $f$ *dans le plan complexe.*

### 1.10.1 Translations, homothéties

Définition 0.12 **Translation, homothétie**

— Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. La *translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$, notée $t_{\overrightarrow{u}}$, est la transformation du plan qui à tout point $M \in \mathscr{P}$ associe le point $M' \in \mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.

— Soit $\Omega$ un point du plan et $\lambda$ un réel non nul. L'*homothétie de centre* $\Omega$ *et de rapport* $\lambda$, noté $h_{\Omega,\lambda}$, est la transformation du plan qui à tout point $M \in \mathscr{P}$ associe le point $M' \in \mathscr{P}$ tel que $\boxed{\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}}$.

*Remarque 0.19*

— Si le rapport d'une homothétie $h$ vaut 1, alors $h$ est l'application identique ( L'application identique de $\mathscr{P}$ est celle qui à tout point $M \in \mathscr{P}$ associe lui-même).

— Les translations conservent les longueurs (on dit que ce sont des *isométries*), les homothéties de rapport $\lambda$ les multiplient par $|\lambda|$.

Proposition 0.43
Soit $\Omega$ un point du plan d'affixe $\omega$ et $\lambda$ un réel différent de 0 et 1. L'homothétie de rapport $\lambda$ et de centre $\Omega$ peut être représentée dans le plan complexe par l'application qui à tout $z \in \mathbb{C}$ associe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $\boxed{z' - \omega = \lambda(z - \omega)}$ (ou encore $z' = \lambda z + (1-\lambda)\omega$).

***Démonstration*** *Le point $M'$ est l'image de $M$ par $h_{\Omega,\lambda}$ si et seulement si $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$ ou encore $\mathrm{Aff}(M) - \mathrm{Aff}(\Omega) = \lambda(\mathrm{Aff}(M)' - \mathrm{Aff}(\Omega))$ c'est-à-dire $z' - \omega = \lambda(z - \omega)$.*

### 1.10.2 Rotation

Définition 0.13 **Rotation**
Soient $\Omega \in \mathscr{P}$ et $\theta$ un réel. La rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$, notée $r_{\Omega,\theta}$ est la transformation du plan qui

— à $\Omega$ associe $\Omega$,

— à tout point $M$ différent de $\Omega$ associe le point $M'$ tel que $\boxed{\left\{ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta\ [2\pi] ||\overrightarrow{\Omega M'}|| = ||\overrightarrow{\Omega M}|| \right.}$

Proposition 0.44
Soient $\Omega \in \mathscr{P}$ et $\theta$ un réel. Soit $\omega$ l'affixe de $\Omega$. La rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ peut être représentée dans le plan complexe par l'application qui à tout $z \in \mathbb{C}$ associe le complexe $z'$ tel que $\boxed{z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)}$ (ou encore $z' = e^{i\theta}z + (1 - e^{i}\theta)\omega$).

***Démonstration*** *Soient $z$ et $z'$ les affixes respectives de $M$ et $M'$. Si $M \neq \Omega$, on a :*
*$M'$ est l'image de $M$ par la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ $\Leftrightarrow$*
$(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta\ [2\pi]$ *et* $\Omega M = \Omega M'$ $\Leftrightarrow$
$\arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta\ [2\pi]$ *et* $|z-w| = |z'-\omega|$ $\Leftrightarrow$
$\arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta\ [2\pi]$ *et* $\left|\dfrac{z-w}{z'-\omega}\right| = 1 \quad (*)$.
*Soit $\rho e^{i\alpha}$ une représentation trigonométrique de $\dfrac{z-w}{z'-\omega}$. Les deux relations précédentes sont équivalentes à $\rho = 1$ et $\alpha = \theta\ [2\pi]$. Donc $(*)$ est équivalente à $\dfrac{z-w}{z'-\omega} = e^{i\theta}$, soit $z'-\omega = e^{i\theta}(z-\omega)$. Si $M = \Omega$ alors $M' = \Omega$ et $z = z' = \omega$. L'égalité $z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$ est alors trivialement vérifiée.*

### 1.10.3 Similitudes directes

Définition 0.14 **Similitude directe**
Une *similitude directe* est une transformation du plan admettant comme représentation dans le plan complexe l'application : $\boxed{\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}z \\ \longmapsto & az+b & \end{array} \right.}$ où $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Proposition 0.45
Une similitude directe conserve les angles orientés et les rapports de longueurs.

***Démonstration*** *Soit $f$ la similitude représentée par $z \mapsto az+b$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ des points de $\mathscr{P}$ tels que $A_1 \neq A_2$ et $A_3 \neq A_4$, $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ leurs affixes respectives et $z_1'$, $z_2'$, $z_3'$, $z_4'$ les affixes respectives de leurs images par $f$. Pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$, on a donc $z_i' = az_i + b$. En particulier :*

$$\left\{ z_2' - z_1' = a(z_2 - z_1) z_4' - z_3' = a(z_4 - z_3) \right.$$

*et donc a étant non nul :* $\dfrac{z'_4 - z'_3}{z'_2 - z'_1} = \dfrac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}$. *Par conséquent*

$$(\widehat{\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_3A'_4}}) = \arg(\frac{z'_4 - z'_3}{z'_2 - z'_1}) = \arg\left(\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}\right) = (\widehat{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_3A_4}}) \ \ [2\pi]$$

*et*

$$\frac{A'_3A'_4}{A'_1A'_2} = \left|\frac{z'_4 - z'_3}{z'_2 - z'_1}\right| = \left|\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}\right| = \frac{A_3A_4}{A_1A_2},$$

*ce qui prouve la propriété.*

Proposition 0.46
La composée de deux similitudes directes est encore une similitude directe.

***Démonstration*** *Soient $f$ et $f'$ deux similitudes directes représentées dans le plan complexe par, respectivement, $z \mapsto az + b$ et $z \mapsto a'z + b'$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et où $(a', b') \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Alors $f' \circ f$ est représentée par $z \mapsto a'(az+b)+b'$ soit $z \mapsto aa'z+a'b+b'$. Notant $\alpha = a'a$ et $\beta = a'b+b'$ et remarquant que $\alpha$ est non nul, on a représenté $f' \circ f$ par $z \mapsto \alpha z + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et $f' \circ f$ est donc bien une similitude directe.*

Proposition 0.47
Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Soit $f$ la similitude du plan représentée dans le plan complexe par $z \mapsto az+b$.

- Si $a = 1$, $f$ est la translation de vecteur d'affixe $b$.
- Si $a \neq 1$, $f$ admet *un unique* point invariant $\Omega$ ( $f(\Omega) = \Omega$ ) appelé *centre de la similitude*. De plus, dans ce cas, si
  1. $\alpha$ est un argument de $a$,
  2. $r$ est la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\alpha$ ( $r_{\Omega,\alpha}$ ),
  3. $h$ est l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $|a|$ ( $h_{\Omega,|a|}$ ),

  alors $f$ s'écrit comme la composée de $h$ et $r$ : $f = r \circ h = h \circ r$. Le réel $|a|$ est appelé le *rapport de la similitude* et $\alpha$ est une *mesure de l'angle de la similitude*. En particulier,
  - si $a \in \mathbb{R}^*$, $f$ est l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $|a|$.
  - si $|a| = 1$, $f$ est la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\alpha$.

***Démonstration***

- *Si $a = 1$, on reconnaît l'application étudiée dans la proposition 0.9.*
- *Supposons maintenant $a \neq 1$ et recherchons les points invariants par $f$. Soit un tel point qu'on suppose d'affixe $z_0$. $z_0$ est alors solution de l'équation $z_0 = az_0 + b$. Cette équation possède une et une seule solution qui est $z_0 = \dfrac{b}{1 - a}$ (car $a \neq 1$ !). Notons $\Omega$ le point d'affixe $z_0$. $\Omega$ est donc l'unique point invariant de $f$. Soient $M$ un point d'affixe $z$. Notons $M'$ le point d'affixe $z' = f(z)$. On a : $z' - z_0 = a(z - z_0)$. Soient $\alpha$ un argument de $a$, $h$ l'homothétie $h_{\Omega,|a|}$ et $r$ la rotation $r_{\Omega,|a|}$. Vérifions que $f$ s'écrit comme la composée de $h$ et de $r$. Notons $z_1$ l'affixe de $r(M)$ et $z_2$ celle de $h(r(M))$. D'après les propositions 0.43 et 0.44 :*

$$z_1 - z_0 = e^{i\alpha}(z - z_0)$$

$$z_2 - z_0 = |a|(z_1 - z_0)$$

*donc*

$$z_2 - z_0 = |a|e^{i\alpha}(z - z_0) = a(z - z_0)$$

*ce qui prouve que* $z_2 = z'$ *et donc que* $z_2$ *est l'affixe de* $f(M)$ *On a donc bien montré que* $f = h \circ r$. *On montre de la même façon que* $f = r \circ h$.

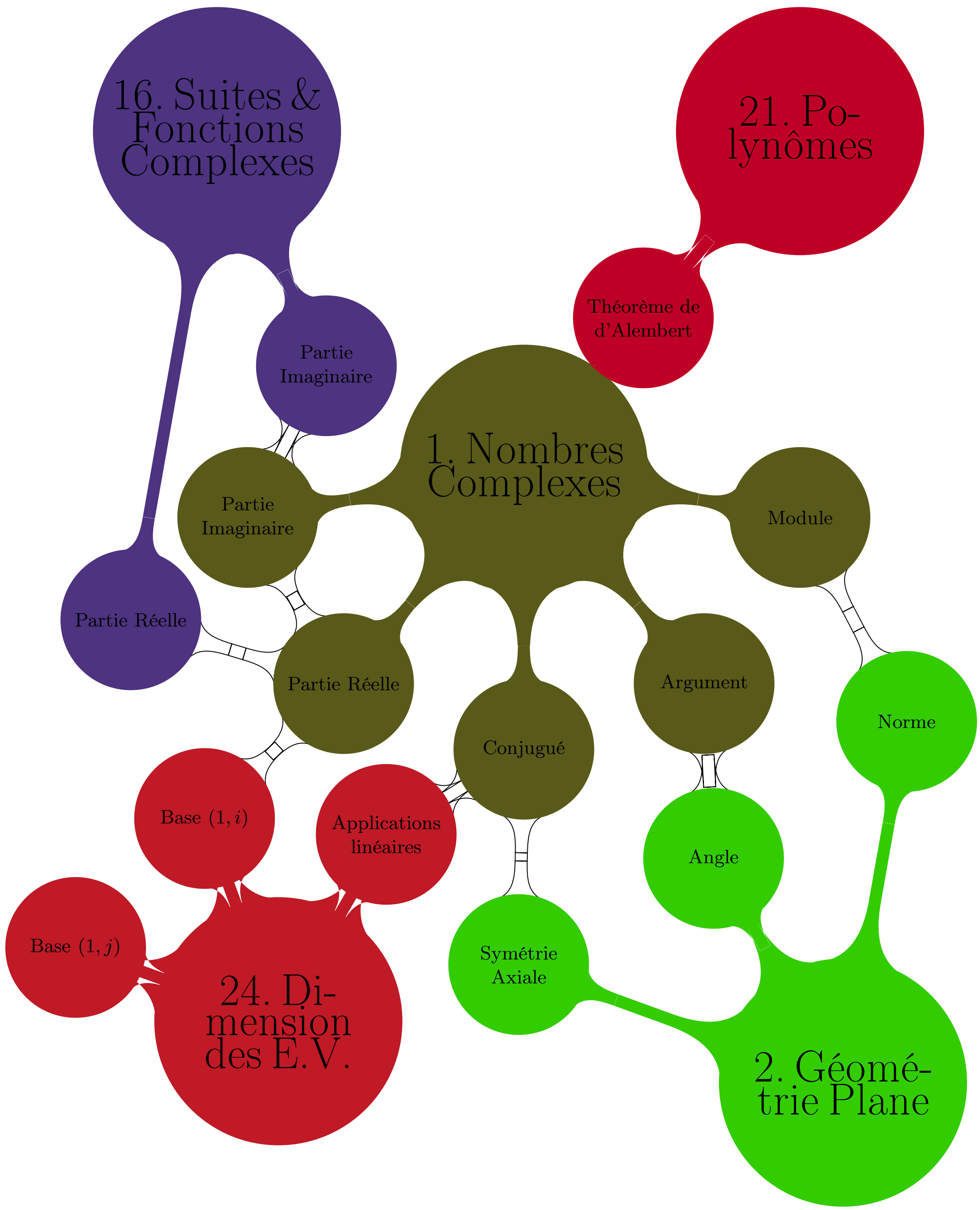
**Multimédia** : On donne un rapport, un angle et un centre. On pointe avec la souris sur un $z$ du plan complexe et le logiciel construit l'image de $z$ par la rotation , puis l'image de ce point par l'homothétie

## En résumé

1. il faut savoir manipuler parfaitement les opérations suivantes sur les nombres complexes : addition, multiplication, conjugaison, calcul du module ou d'un argument.
2. il faut connaître parfaitement les formules d'Euler et de Moivre.
3. la fonction exponentielle complexe doit être bien maîtrisée. La technique de factorisation par les angles moitiés est d'un usage fréquent dans les exercices.
4. il faut savoir calculer les racines carrées d'un nombre complexe ainsi que les solutions d'une équation du second degré à coefficients complexes.
5. il faut avoir bien compris les groupes $\mathbb{U}$ et $\mathbb{U}_n$ tant au niveau algébrique que géométrique.
6. les différentes transformations du plan doivent être bien maîtrisées ainsi que la traduction en terme d'affixe des notions d'angle ou de distance.

Il est essentiel de compléter la lecture de ce chapitre par celle des paragraphes suivants de l'annexe **??** :

1. Trigonométrie, voir paragraphe **??** page **??**.
2. Calculs de sommes, voir paragraphe **??** page **??**.
3. Trigonométrie et complexes, voir paragraphe **??** page **??**.
4. Calculs sur des polynômes, voir le paragraphe **??** page **??** consacré au trinôme du second degré ainsi que le paragraphe **??** page **??** consacré à la factorisation des polynômes grâce aux racines de l'unité.



16. Suites & Fonctions Complexes
21. Polynômes
Théorème de d'Alembert
Partie Imaginaire
1. Nombres Complexes
Partie Imaginaire
Module
Partie Réelle
Partie Réelle
Argument
Norme
Conjugué
Base $(1, i)$
Applications linéaires
Angle
Base $(1, j)$
Symétrie Axiale
24. Dimension des E.V.
2. Géométrie Plane

## Références