Formes différentielles

François Capaces[1], Christophe Antonini[2], Olivier Teytaud[3], Pierre Borgnat[4], Annie Chateau[5], and Edouard Lebeau[6]

[1], ,
[2]Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes
[3]Chargé de rechercher INRIA, Université d'Orsay, Orsay
[4]Chargé de recherche CNRS, ENS Lyon, Lyon
[5]Maitre de conférence, Université Montpellier-2, Montpellier
[6]Enseignant en CPGE, Lycée Henri Poincaré, Nancy

11 août 2023

Rudiments sur les formes différentielles.

1 Formes différentielles

Le but de ce chaitre n'est pas d'épuiser les richesses de ce sujet très technique que sont les formes différentielles. De nombreuses définitions et de nombreux théorèmes seront donnés sans justification, notamment dans les fondements des formes différentielles, au niveau des propriétés d'algèbre multilinéaire. Le lecteur est renvoyé à [1] s'il souhaite approfondir le sujet.

1.1 Généralités, rappels sur les applications multilinéaires

1.1.1 Définition d'une forme différentielle

Définissons tout d'abord ce qu'est une application différentielle :

DÉFINITION 0.1 **forme différentielle de degré p sur U à valeurs dans F**

Soit U un ouvert de E un $\mathbb{R}$-espace de Banach, soit F un $\mathbb{R}$-espace de Banach.
On appelle **forme différentielle de degré p sur U à valeurs dans F** une application de U dans $\mathcal{A}_p(E;F)$ [1].
La forme différentielle est dite de classe C^n si l'application est C_n (pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$).
On note $\Omega_p^{(n)}(U,F)$ l'ensemble des p formes différentielles de U dans F de classe C^n.

Exemple 0.1 Deux exemples :

— une application C^n de E dans F est une 0-forme différentielle de E dans F, de classe C^n.

— si $n > 0$, sa différentielle est une forme 1-différentielle de classe C^{n-1}.

Nous allons définir plus loin de nombreuses opérations sur cet outil, mais tout d'abord nous devons rappeler certaines propriétés des applications multilinéaires.

1.1.2 Propriétés des applications multilinéaires

DÉFINITION 0.2 **multiplication d'applications p-linéaires alternées**

Etant donnée une application ϕ bilinéaire de $F \times G$ dans H, on définit une **multiplication d'applications p-linéaires alternées** par :

$$\mathcal{A}_p(E,F) \times \mathcal{A}_q(E,G) \to \mathcal{A}_{p+q}(E,H)$$

$$(f,g) \mapsto f \wedge_\phi g$$

définie par

$$(f \wedge_\phi g)(x_1,\ldots,x_{p+q}) = \sum_\sigma \epsilon(\sigma)\phi(f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(p)}),g(x_{\sigma(p+1)},x_{\sigma(p+2)},\ldots,x_{\sigma(p+q)}))$$

La sommation étant étendue à l'ensemble des permutations σ de $[1,n]$ telles que $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \cdots < \sigma(p+q)$.

Remarque Il conviendrait de montrer que $f \wedge_\phi g$ est bien $p+q$ linéaire, continue et alternée.

Remarque souvent on s'abstiendra de noter $\wedge_\phi$; on se contentera de $\wedge$. ϕ sera souvent implicitement l'application la plus intuitive ; par exemple si H et G sont égaux et si F est $\mathbb{R}$, on utilisera le produit d'un élément d'un Banach par un réel.

PROPOSITION 0.1 **Propriété du produit d'applications multilinéaires**

$\wedge_\phi$ est bilinéaire.

PROPOSITION 0.2 **Propriétés du produit de formes multilinéaires**

•Si f appartient à $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ et g appartient à $\mathcal{A}_q(E, \mathbb{R})$, alors $f \wedge g = (-1)^{pq} g \wedge f$

•Si f ppartient à $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$, g appartient à $\mathcal{A}_q(E, \mathbb{R})$ et h appartient à $\mathcal{A}_r(E, \mathbb{R})$, alors $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$.

•Si les f_i sont des formes linéaires continues sur E (dans $\mathbb{R}$), pour $i \in [1, n]$, alors

$$f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \sigma^n} \epsilon(\sigma) f_i(x_{\sigma(i)}) = det\ (f_i(x_j))_{i,j}$$

PROPOSITION 0.3 **Propriétés des application p-linéaires avec** $\dim E = n$

E est ici supposé isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Toute application p-linéaire de E dans F s'écrit de manière unique

$$x \mapsto \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n} \underbrace{c_{i_1, \ldots, i_p}}_{\in F} e^*_{i_1} \wedge e^*_{i_2} \wedge \ldots e^*_{i_p}$$

avec la famille des e^*_i la base duale de la base des e_i (base canonique de $\mathbb{R}^n$), c'est-à-dire que les e^*_i sont les formes qui donnent les coordonnées d'un point.

En particulier, si $p = n$, l'application s'écrit $x \mapsto (e^*_1 \wedge e^*_2 \wedge \cdots \wedge e^*_n)(x)c$, avec c un élément de F, et si $p > n$, l'application est nécessairement nulle.

1.1.3 Application de tout ça aux formes différentielles

DÉFINITION 0.3 **Produit extérieur de formes différentielles**

U désigne un ouvert d'un espace de Banach E. F, G et H sont des espaces de Banach .

On se donne ϕ une application bilinéaire de $F \times G$ dans H. On suppose que $f \in \Omega^{(n)}_p(U, F)$ et que $g \in \Omega^{(n)}_q(U, G)$.

On définit alors le **produit extérieur des forme différentielle s** f **et** g $f \wedge_\phi g \in \Omega^{(n)}_{p+q}(U, H)$ par

$$f \wedge_\phi g : x \mapsto f(x) \wedge_\phi g(x)$$

La notation est abusive du fait que l'on garde la même notation que pour le produit d'applications multilinéaires. Là aussi on négligera souvent de préciser $\wedge_\phi$, et on gardera $\wedge$.

Exemple 0.2 Si $F = G = H = \mathbb{R}$, ϕ est alors généralement implicitement le produit usuel. Alors le produit de formes différentielle est anticommutatif et associatif, et

$$(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge w_n)(x)(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) w_1(x)(h_{\sigma(1)}) w_2(x)(h_{\sigma(2)}) \ldots w_n(x)(h_{\sigma(n)}) = det\,(\omega_i(e_j)_{i,j})$$

Références

[1] H. Cartan, *Calcul différentiel*, Hermann, 1977.