Développements limités et comparaison de fonctions

Christophe Antonini[1], Olivier Teytaud[2], Pierre Borgnat[3], Annie Chateau[4], and Edouard Lebeau[5]

[1]Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes
[2]Chargé de rechercher INRIA, Université d'Orsay, Orsay
[3]Chargé de recherche CNRS, ENS Lyon, Lyon
[4]Maitre de conférence, Université Montpellier-2, Montpellier
[5]Enseignant en CPGE, Lycée Henri Poincaré, Nancy

11 août 2023

Tout sur les développements limités

1 Développements limités et comparaison de fonctions

Après les définitions de base, on verra les opérations autorisées sur les développements limités et les équivalents, le cas particulier des développements asymptotiques, et pour finir un peu de zoologie.

1.1 Définitions de base

Définition 0.1 **équivalente**
On se donne a un point d'un espace topologique X, et on note $\mathcal{V}'(A)$ l'ensemble des voisinages de a privés de a, et $U \in \mathcal{V}'(A)$.

Étant donné deux applications f et g, f de U dans un espace vectoriel normé et g de U dans $\mathbb{R}$, on dit que f est **dominée** par g, noté $f = O(g)$, si il existe une constante M telle que $\|f\| \leq M.|g|$ sur un certain $V \in \mathcal{V}'(A)$.

Étant donné deux applications f et g, f de U dans un espace vectoriel normé et g de U dans $\mathbb{R}$, on dit que f est **négligeable** devant g, noté $f = o(g)$, si pour tout ϵ il existe $V \in \mathcal{V}'$ tel que $\|f\| \leq \epsilon.|g|$ sur un certain $V \in \mathcal{V}'(A)$.

Étant donné deux applications f et g de U dans $\mathbb{R}$, on dit que f est **équivalente** à g et on note $f \simeq g$ si $f - g = o(g)$.

⚠ *Attention 0.1* Ces notions sont locales ; $o(f)$ est lié, implicitement, à a ; la notation, dépourvue de la mention de a, est légèrement abusive car dépendant du contexte.

⚠ *Attention 0.2* La notation est doublement abusive ; $f = o(g)$ signifie en fait que f appartient à l'ensemble des fonctions négligeables devant g– il ne s'agit pas d'égalité mais d'appartenance.

Proposition 0.1

•$f = o(1)$ si et seulement si f tend vers 0 en a.

•$f = O(1)$ si et seulement si f est bornée au voisinage de a.

•$\simeq$ est une relation d'équivalence.

•f admet une limite en a et $f \simeq g$ implique que g admet la même limite en a.

•Si f admet une limite finie non nulle en a, alors $f \simeq g$ si set seulement si g admet la même limite en a.

•$f = o(g)$ équivaut à l'existence de V dans $\mathcal{V}'$ et d'une fonction ϵ de V dans $\mathbb{R}^+$ tendant vers 0 en a telle que

$$\forall x \in V, \|f(x)\| \leq \epsilon(x).|g(x)|$$

•$f \simeq g$ équivaut à l'existence de V dans $\mathcal{V}'$ et d'une fonction ϵ de V dans $\mathbb{R}$ tendant vers 0 en a telle que

$$\forall x \in V,\ f(x) = (1 + \epsilon(x)).g(x)$$

•$f \simeq g$ implique que f et g ont même signe au voisinage de a

•$f \simeq 0$ implique que f est nulle au voisinage de a (**Attention :** et pas seulement que f tend vers 0 !)

•En $+\infty$ $x \mapsto (\ln(x))^a$ est négligeable devant $x \mapsto x^b$ qui est négligeable devant $x \mapsto e^{cx^d}$ pour a, b, et $c > 0$, $d > 0$.

Ces notations sont appelées notations de Landau.

Application 0.3 Voir par exemple **??**.

Définition 0.2 **Développement limité**

On dit que f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ admet un **développement limité** en $a \in \mathbb{R}$ à l'ordre n s'il existe une fonction polynôme P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que au voisinage de a

$$f(x) = P(x) + o((x - a)^n).$$

Bien que peu utilisé dans la pratique, il existe une autre définition, plus générale, utilisant les polynômes à coefficients dans un espace vectoriel normé :

Définition 0.3 **Généralisation**

On dit que f de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel normé E admet un **développement limité** en $a \in \mathbb{R}$ à l'ordre n s'il existe un polynôme P à coefficients dans E telle que au voisinage de a

$$f(x) = P(x) + o((x-a)^n).$$

On n'étudiera pas ce cas, pour lequel on se réfèrera au livre [1].

On définit parfois la notion de développement limité au sens fort :

Définition 0.4 **Développement limité au sens fort**

On dit que f de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel normé E admet un **développement limité au sens fort** en $a \in \mathbb{R}$ à l'ordre n s'il existe un polynôme P à coefficients dans E telle que au voisinage de a $f(x) = P(x) + O((x-a)^{n+1})$.

Proposition 0.2

•On peut toujours imposer que P soit de degré $\leq n$. En effet il suffit de prendre le reste dans la division euclidienne de P par $(x-a)^{n+1}$; le quotient multiplié par $(x-a)^n$ sera un négligeable devant $(x-a)^{n+1}$. Cette condition sur le degré rend le développement limité unique.

•Si f est continue en a, alors elle admet un développement limité en a d'ordre 0.

•Si f est dérivable en a, alors elle admet un développement limité en a d'ordre 1.

•Si f admet un développement limité à l'ordre 0 en a, alors elle est continue en a ou admet un prolongement par continuité en a.

•Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, alors elle est dérivable en a ou est prolongeable en une fonction dérivable en a.

•si f est n fois dérivable en a, alors elle admet un développement limité en a d'ordre n (voir le théorème **??**).

⚠ *Attention 0.4* Il n'y a pas de réciproque au dernier •! Une fonction peut admettre un développement limité d'ordre n sans être dérivable plus d'une fois.

Exemple 0.5 exemples (fonction admettant un développement limité à l'ordre 2 sans être 2 fois dérivable :

Considérons la fonction $f : t \mapsto t^3.\sin(1/t)$ prolongée par continuité en 0 ($f(0) = 0$).

On considère son développement limité en 0.

Il est clair que $f(t) = O(t^3)$ car sin est bornée.

Cependant, la fonction $f' : x \mapsto 3t^2.\sin(1/t) - t.\cos(1/t)$ n'est pas dérivable en 0, si bien que f n'est pas dérivable deux fois en 0.

1.2 Opérations sur les équivalents et les développements limités

PROPOSITION 0.3
On suppose f, g, h et $k > 0$ au voisinage de a ; x est un réel.

$\bullet f \simeq g$ et $h \simeq k \Rightarrow fh \simeq gk$

$\bullet f \simeq g \Rightarrow f^x \simeq g^x$

⚠ *Attention 0.6* Par contre on n'a *pas* la possibilité d'additionner des équivalents, même positifs.

PROPOSITION 0.4 **Unicité du développement limité**

Si f admet un développement limité en a à l'ordre n, ce développement limité est unique.

Démonstration *Écrire la différence entre deux polynômes de degré n comme un $o\left((x-a)^n\right)$; puis considérer le premier coefficient sur lequel ils diffèrent.*

On peut définir les développements limités sur des intervalles de $\mathbb{R}$ (i.e. approximant la fonction seulement à l'intérieur de ces intervalles) ; dans ce cas on note que le développement limité en a ou en b pour un développement limité sur $]a, b[$ est unique.

PROPOSITION 0.5 **Troncature des développements limités**

Si $f(t) = P(t) + o((t-a)^n)$ alors a fortiori $f(t) = P(t) + o((t-a)^p)$ pour $p < n$.

PROPOSITION 0.6
Si $f(t) = P(t)(t-a)^k + o((t-a)^n)$ avec $k < n$ alors g définie par $g(t) = f(t)/(t-a)^k$ est prolongeable par continuité en a et $g(t) = P(t) + o((t-a)^{n-k})$.

PROPOSITION 0.7 **Intégration d'un développement limité**

Supposons f de classe C^1 au voisinage de a, et

$$f'(t) = a_0 + a_1(t-a) + a_2(t-a)^2 + ... + a_n(t-a)^n + o((t-a)^n)$$

Alors

$$f(t) = f(a) + a_0(t-a) + \frac{a_1}{2}(t-a)^2 + \frac{a_2}{3}(t-a)^3 + ... + \frac{a_n}{n+1}(t-a)^{n+1} + o((t-a)^{n+1})$$

Démonstration *On suppose donc*

$$f(t) = P(t) + \epsilon(t)(t-a)^n$$

On se ramène par translation à $a = 0$ et on écrit

$$f(t) = f(0) + \int_0^t P(u)du + \int_0^t \epsilon(u)du$$

$$\left|f(t) - f(0) - \int_0^t P(u)du\right| = \left|\int_0^t \epsilon(u)du\right|$$

$$\leq sup_{u\in[0,t]}|\epsilon(u)| \int_0^t |u^n|.du$$

D'où le résultat.

On a un résultat similaire avec des développements limités au sens fort.

PROPOSITION 0.8 **Intégration d'un développement limité au sens fort**

Supposons f dérivable au voisinage de a, et

$$f'(t) = a_0 + a_1(t-a) + a_2(t-a)^2 + ... + a_n(t-a)^n + O((t-a)^{n+1})$$

Alors

$$f(t) = f(t_0) + a_0(t-a) + \frac{a_1}{2}(t-a)^2 + \frac{a_2}{3}(t-a)^3 + ... + \frac{a_n}{n+1}(t-a)^{n+1} + O((t-a)^{n+2})$$

Démonstration *Tout à fait similaire à la preuve précédente.*

⚠ *Attention 0.7* On NE PEUT PAS, dans le cas général, dériver terme à terme un développement limité ! Toutefois, c'est possible pour une fonction de classe C^∞ par exemple.

Par simplicité, on va maintenant supposer que $a = 0$. On en déduit bien évidemment le cas général.

DÉFINITION 0.5 **tangente**

On définit la relation suivante sur l'ensemble des fonctions continues en 0 :

$$f \equiv^n g \text{ si } f - g = o(x^n)$$

On dit que f est **tangente** à g à l'ordre n.

PROPOSITION 0.9

Voyons quelques propriétés des tangentes.

•caractérisation de l'équivalence :

$$f \equiv^n g \text{si et seulement si } \lim_{t\to 0} t^{-n}(f(t) - g(t)) = 0$$

•$f \equiv^n g$ et $h \equiv^n k$ impliquent $f + h \equiv^n g + k$
•$f \equiv^n g$ et $h \equiv^n k$ impliquent $f.h \equiv^n g.k$
•$f \equiv^n g$ et $f(0) \neq 0$ impliquent $1/f \equiv^n 1/g$
•$f \equiv^n g$ et P polynôme impliquent $P \circ f \equiv^n P \circ g$
•$f \equiv^n g$ et $h(x) = O(x^p)$ impliquent $f \circ h \equiv^{np} g \circ h$

Démonstration *Seuls les trois derniers points méritent notre attention, les autres étant clairs.*

•*Supposons donc $f \equiv^n g$ et $f(0) \neq 0$.*

$$x^{-n}(1/f(x) - 1/g(x)) = \frac{g(x) - f(x)}{x^n f(x) g(x)}$$

Or f et g ont une limite non nulle en 0. Donc

$$\frac{g(x) - f(x)}{x^n f(x) g(x)} \text{ tend vers 0 en 0 ;}$$

d'où le résultat.

•*Il est suffisant de le montrer avec P un monôme ; et ce résultat découle de*

$$f^p(x) - g^p(x) = (f(x) - g(x)) \sum_{k=0}^{p-1} f(x)^k g(x)^{p-1-k}$$

(le terme en $\sum$ étant borné)

•*On procède comme suit :*

- *Écrivons $f(x) - g(x) = \epsilon(x)x^n$, avec $\epsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$*
- *Écrivons $h(x) = M(x)x^p$, avec M bornée au voisinage de 0*
- *Alors $f \circ h(x) - g \circ h(x) = \epsilon(M(x)x^p)M(x)^n x^{np}$*

Le résultat est alors acquis ; on note l'efficacité de la méthode consistant à écrire explicitement les $o(.)$ avec des $\epsilon(.)$ et des $M(.)$.

Ces résultats vont permettre de combiner des développements limités de la manière expliquée ci-dessous.

Proposition 0.10 **Somme, produit, quotient, composée**

Soient f et g admettant des développements limités en 0 à l'ordre n.

Alors $f + g$ et fg admettent des développements limités en 0 à l'ordre n, et f/g aussi si $g(0) \neq 0$.

•Le développement limité de $f + g$ est la somme des développements limités de f et g.

•Le développement limité de fg est le produit des développements limités de f et g (on peut tronquer les termes de degré $> n$).

•Le développement limité du composé $g \circ f$, si $f(0) = 0$, si $f \equiv^n P$ et si $g \equiv^n Q$, est $Q \circ P$, valable à l'ordre n (les termes de degré $> n$ passent dans $o(x^n)$).

•Le développement limité de f/g est égal au développement limité du quotient des développements limités de f et g.

Démonstration

•*Le cas de l'addition, du produit découlent immédiatement des résultats précédents.*

•*En reprenant les notations de l'énoncé, on écrit*

$$g \circ f(x) = Q(f(x)) + \epsilon(f(x))f(x)^n$$

On sait ensuite que $Q(f(x))$ est équivalent à $Q(P(x))$ à l'ordre n (résultat de la proposition précédente). Et on sait que $f(x)^n$ est équivalent à $Q(x)^n$ à l'ordre n, toujours par la proposition précédente. D'où le résultat.

•Pour le quotient, il suffit, en vertu du résultat sur le produit, d'étudier le développement limité de l'inverse d'une fonction g donnée.

Or si P est le développement limité de g à l'ordre n, alors $1/g \equiv^n 1/P$ (résultat prouvé un peu plus haut).

Il suffit donc de calculer le développement limité de l'inverse. D'où le résultat (on verra un peu plus loin comment déterminer en pratique le développement limité en question).

Proposition 0.11
Les résultats précédents restent vrais si l'on travaille avec des développements limités au sens fort.

Démonstration *Les preuves sont les mêmes à peu de choses près.*

⚠ *Attention 0.8* Dans la pratique du calcul des développements limités , bien penser à ne PAS calculer les termes de degré trop élevés, qui devront de toute façon être oubliés.

Proposition 0.12

Le développement limité du quotient de P par Q est donné par la division suivant les puissances croissantes (voir théorème **??**).

C'est-à-dire :

Avec $Q(0) \neq 0$, P/Q est équivalent en 0 à T, avec

$$P = TQ + X^{n+1}R$$

Démonstration *Le résultat découle immédiatement de la formule*

$$P = TQ + X^{n+1}R,$$

en calculant $X^{-n-1}.(P/Q - T)$.

1.3 Développements asymptotiques

La plupart des résultats de cette partie étant relativement faciles à établir à partir des résultats précédents ou par des méthodes similaires, les théorèmes seront généralement énoncés sans preuve.

Les développements limités sont limités au cas de fonctions admettant une limite en a ; on aimerait pouvoir manier des fonctions tendant vers l'infini, en les approchant par des fractions rationnelles au lieu de les approcher par des polynômes, par exemple.

Pour cela on étend les notations o, O et $\simeq$ à des fonctions non nécessairement définies continues en a, et a peut désormais être $+\infty$ ou $-\infty$.

On dira que $f = O(g)$, si f est inférieure en module à Cg pour C une certaine constante et sur un certain voisinage de a.

On dira que $f = o(g)$ si pour tout ϵ positif, f est inférieure en module à $\epsilon.g$ sur un certain voisinage V_ϵ (dépendant de ϵ bien sûr) de a.

On dira que $f \simeq g$ si $f - g = o(f)$.

De nombreuses propriétés restent valables ou s'étendent :

•$f \simeq g$ et $h \simeq k$ impliquent $fh \simeq gk$

•$f \simeq g$ et $1/f$ non nul au voisinage impliquent $1/f \simeq 1/g$
•si $h(b) = a$ et si h est continue en b, alors $f \simeq g$ implique $f \circ h \simeq g \circ h$.

DÉFINITION 0.6 **échelle de comparaison au voisinage de** a
On appelle **échelle de comparaison au voisinage de** a [1] une famille d'applications définies au voisinage de a, non équivalentes à 0, et totalement ordonnée par o.

Exemple 0.9
•Les monômes x^k pour $k \in \mathbb{Z}$ constituent une échelle de comparaison au voisinage de l'infini.
•Les monômes x^k pour $k \in \mathbb{Z}$ constituent une échelle de comparaison au voisinage de zéro.
Mais on peut faire plus fin :
•Les monômes x^r pour $r \in \mathbb{R}$ constituent une échelle de comparaison au voisinage de l'infini.
•Les monômes x^r pour $r \in \mathbb{R}$ constituent une échelle de comparaison au voisinage de zéro.
•Les $x \mapsto x^\alpha \ln(x)^\beta$ constituent une échelle de comparaison (ordonnée par l'ordre lexicographique sur (α, β)) au voisinage de $+\infty$
•Les $x \mapsto x^\alpha \ln(x^\beta)$ ne constituent PAS une échelle de comparaison, car pour α fixé, elles sont proportionnelles entre elles !
•Les $x \mapsto x^\alpha e^{xP(x)}$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$ constituent une échelle de comparaison, ordonnée par l'ordre lexicographique sur les coefficients de P par ordre décroissant puis le coefficient α (attention, il s'agit d'un ordre lexicographique sur des suites pouvant avoir un nombre de termes arbitrairement grand...) au voisinage de $+\infty$.
•Avec

$$\ln_n(x) = \underbrace{\ln \circ \ln \circ \ln \circ ... \circ \ln}_{n \text{ fois}}(x),$$

les $x \mapsto x^\alpha \Pi_{i=1}^n \ln_i(x)^{\beta_i}$ forment [2] une échelle de comparaison au voisinage de $+\infty$.
•Toujours au voisinage de $+\infty$, la famille des $\Pi_{i=1}^n \ln_i(x)^{\beta_i} x^\alpha \Pi_{j=1}^p e^{\lambda_j x^{\mu_j}}$ forme aussi une échelle de comparaison. L'exponentielle l'emporte sur les puissances qui l'emportent sur les logarithmes.

DÉFINITION 0.7
On se donne f une application d'une partie X de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et a appartenant à l'adhérence de X dans $\overline{\mathbb{R}}$, et on se donne $\mathcal{E}$ une échelle de comparaison au voisinage de a.

On dit que f admet un développement asymptotique pour l'échelle $\mathcal{E}$ à la précision ϕ avec ϕ un élément de $\mathcal{E}$ s'il existe une famille de réels presque tous nuls [3] $(\lambda_\psi)_{\psi \in \mathcal{E}}$ tels que

$$f(x) = \sum_{\psi \in \mathcal{E}} \lambda_\psi \psi(x) + o(\phi)$$

1.4 Zoologie des comparaisons de séries, de fonctions

Nous verrons ici quelques exemples d'équivalents. Il y a plus à comprendre qu'à apprendre, même si ça aide d'avoir un peu en tête le $f'/f = r + o(1)$ des comparaisons séries/intégrales.

2. pour α dans $\mathbb{R}$, n dans $\mathbb{N}$ et les β_i dans $\mathbb{R}$

1.4.1 Équivalent de la suite des sommes partielles $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$

Citons un résultat important :

Théorème 0.13
Étant donné deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que l'on suppose strictement positives à partir d'un certain rang, on définit leurs sommes partielles $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$. Dans le cas où la série $\sum u_n$ converge, on note U sa somme, et on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = U - U_n$ le reste de cette série. De même, en cas de convergence de la série $\sum v_n$, on note V sa somme et $R'_n = V - V_n$ son reste. Alors :

Hypothèses	Conclusions
$u_n \simeq v_n$ U_n converge	V_n converge $R_n \simeq R'_n$
$u_n \simeq v_n$ U_n diverge	V_n diverge $U_n \simeq V_n$
$v_n = O(u_n)$ U_n converge	V_n converge $R'_n = O(R_n)$
$v_n = o(u_n)$ U_n converge	V_n converge $R'_n = o(R_n)$
$v_n = o(u_n)$ V_n diverge	U_n diverge

1.4.2 Équivalent de $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

Théorème 0.14
On se donne désormais deux fonctions f et g définies sur $]a, +\infty[$ intégrables sur $]a, x[$ pour tout $x > a$.

ON SUPPOSE QUE f EST POSITIVE sur $]b, \infty[$ avec $b \geq a$

On définit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. Si F a une limite en $+\infty$ on définit $R_f(x) = \int_x^\infty f(t)dt$, et si G a une limite en $+\infty$ on définit $R_g(x) = \int_x^\infty f(t)dt$.

Alors on a les résultats suivant au voisinage de $+\infty$:

$$\left\{\begin{array}{ll} \int_a^x f(t)dt = +\infty & \left\{\begin{array}{c} g = o(f) \Rightarrow G = o(F) \\ g = O(f) \Rightarrow G = O(F) \\ g \simeq f \Rightarrow F \simeq G \end{array}\right. \\ \int_a^x f(t)dt < +\infty & \left\{\begin{array}{ll} g = o(f) \Rightarrow & \left\{\begin{array}{c} \int_a^\infty g(t)dt \text{ existe} \\ R_g = o(R_f) \end{array}\right. \\ g = O(f) \Rightarrow & \left\{\begin{array}{c} \int_a^\infty g(t)dt \text{ existe} \\ R_g = O(R_f) \end{array}\right. \\ g \simeq f \Rightarrow & \left\{\begin{array}{c} \int_a^\infty g(t)dt \text{ existe} \\ R_g \simeq R_f \\ g \geq 0 \text{ sur }]c, \infty[\text{ avec } c \geq a \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Démonstration *Certaines preuves se trouvent un peu plus haut ; les autres sont faciles.*

1.4.3 Comparaison séries-intégrales, cas $\frac{f'}{f}$ convergent

Théorème 0.15

On se donne une fonction f strictement positive et de classe C^1 au voisinage de $+\infty$.

On considère d'une part la série $\sum f(n)$, et d'autre part l'intégrale $\int_a^\infty f$.

On définit $\mathcal{S}_n = \sum_{i=0}^n f(i)$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ (avec a suffisamment grand).

Soit $K(r) = \frac{r}{1-e^{-r}}$, prolongé par continuité en 0 par $K(0) = 1$.

Si la somme converge, on définit $R_n = \sum_{i=n+1}^\infty f(i)$.

Si l'intégrale converge, on définit $R_f(x) = \int_x^\infty f(t)dt$ (pour x assez grand).

On suppose $\frac{f'}{f} = r + o(1)$ alors

•l'intégrale converge $\iff$ la série converge, on a alors $R_n \simeq K(r)F(n)$.

•l'intégrale diverge $\iff$ la série diverge, on a alors $\mathcal{S}_n \simeq K(r)F(n)$.

⚠ *Attention 0.10* Voir le théorème **??** pour plus d'informations sur le cas $a = 0$.

Démonstration *On définit* $g(t) = e^{-rt} f(t)$.

Alors on a $\frac{g'}{g} = o(1)$.

Donc on peut trouver un certain η *tel que sur* $]\eta, \infty[$ $|\frac{g'}{g}| \leq \epsilon$. *Donc pour* x *appartenant à* $[n-1, n]$ *et pour* $x > \eta$,

$$|\ln(\frac{g(x)}{g(n)})| \leq \epsilon$$

$$\text{et donc } \frac{g(x)}{g(n)} \leq e^\epsilon \text{ et } \frac{g(n)}{g(x)} \leq e^\epsilon$$

$$(e^{-\epsilon}-1)\ f(n) \le f(x)-f(n) \le (e^{\epsilon}-1)\ f(n)$$

$$\text{Alors } \int_{n-1}^{n} f(t)dt = \int_{n-1}^{n} e^{rt}(f(t)-f(n))dt + \int_{n-1}^{n} e^{rt} f(n)dt$$

Si $r = 0$ l'intégrale tout à droite est simplement $f(n)$, et le résultat en découle ; si $r \neq 0$, on réécrit cette expression sous la forme

$$\left|\int_{n-1}^{n} f(t)dt - K(r)f(n)\right| \le e^{rn}(e^{\epsilon}-1)g(n) = (e^{\epsilon}-1)f(n)$$

Et on a le résultat souhaité.

Références

[1] H. Cartan, *Calcul différentiel*, Hermann, 1977.