Espaces $\mathcal{L}^p$ et espaces L^p

Christophe Antonini[1], Olivier Teytaud[2], Pierre Borgnat[3], Annie Chateau[4], and Edouard Lebeau[5]

[1]Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes
[2]Chargé de rechercher INRIA, Université d'Orsay, Orsay
[3]Chargé de recherche CNRS, ENS Lyon, Lyon
[4]Maitre de conférence, Université Montpellier-2, Montpellier
[5]Enseignant en CPGE, Lycée Henri Poincaré, Nancy

28 décembre 2021

Des résultats classiques dans les espaces $\mathcal{L}^p$ et et les espaces L^p.

1 Espaces $\mathcal{L}^p$ et espaces L^p

Les propriétés des espaces L^p sont fondamentales dans de nombreux secteurs de l'analyse et donc nous utiliserons abondamment le symbole $\|$ dans cette section pour souligner des applications : par exemple, en statistique, en approximation de fonctions et en apprentissage, on cherche des fonctions $\hat{f}$ ressemblant à une fonction f. Dans le cas de statistiques ou d'apprentissage, $\hat{f}$ n'est en général pas construit à partir de f directement, mais à partir de données $x_1, \ldots, x_n$ et de leurs images par f, $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n)$, possiblement bruitées. Pour certains algorithmes, on montre par exemple des convergence dans L^p de $\hat{f}$ vers f pour toute f mesurable, et ce presque sûrement en les couples (x_i, y_i) s'ils sont aléatoires simples ; cette propriété est appelée consistance universelle de l'algorithme d'apprentissage. Une autre application possible des espaces L^p est le débruitage (par exemple d'une image) par la convolution. La convolution est ses propriétés de convergence sont un point fondamental. L'analyse de Fourier est aussi une grande consommatrice d'espaces L^2 ; cet aspect fera l'objet d'une partie spécifique (chapitre **??**).

Dans le cas de l'approximation de fonctions, on dispose en général de f, mais il est par exemple long à calculer, et on cherche donc un substitut à f précis et rapide à calculer. De nombreux cas intermédiaires existent : parfois on cherche à déterminer les x_i pour que les couples $(x_i, y_i = f(x_i))$ soit les plus informatifs possibles. Le choix de la valeur de p est important : $p = 1$ conduit à une appproximation plus stable vis à vis des niveaux de bruits (dans le sens où une médiane est plus stable qu'une moyenne), $p = \infty$ est un cadre robuste en particulier souhaitable pour l'approximation de fonctions telle qu'utilisée dans le principe de Bellman (on pourra consulter par exemple le livre de Bertsekas et Tsitsiklis, Neurodynamic programming, Athena Publishing, 1996).

On peut noter l'essort de l'approximation de fonctions pour des pseudo-normes plus originales, par exemple $f \mapsto \int \min(|f - \epsilon|, 0)$, dite norme L^1 ϵ-insensible (qui n'est en fait pas une norme, puisque des fonctions non-nulles ont une « norme » nulle), dont l'étude est un domaine de recherche ; le lecteur intéressé peut par exemple étudier la notion de fat-shattering dimension (Antony et Bartlett, Theoretical Foundations of Neural Networks, 1999, et la vaste littérature consacrée aux SVMs, dites « séparateurs à vaste marge »).

1.1 Quelques résultats utiles

Définition 0.1 **Nombres conjugués**
On dit que deux réels p et q sont conjugués si ils sont tous les deux dans $[1, \infty]$ et si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Lemme 0.1
Pour $\alpha \in]0, 1[$ et $(u, v) \in (\mathbb{R}^+)^2$ on a $u^\alpha.v^{1-\alpha} \leq \alpha.u + (1 - \alpha).v$

Démonstration *On suppose u et v non nuls (sinon le résultat est évident). On passe alors au* ln *et le résultat est directement une conséquence de la concavité de* ln.

Ce résultat est donc un exemple d'application de la convexité. Il sert notamment à établir le résultat suivant, dont les applications sont multiples :

Théorème 0.2 **Inégalités de Hölder**
Soient f et g deux fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, et soient p et q deux réels $\in]1, \infty[$ conjugués, alors

$$\int f.g \leq (\int f^p)^{\frac{1}{p}}.(\int g^q)^{\frac{1}{q}}$$

Démonstration *•Posons $F = (\int f^p)^{\frac{1}{p}}$ et $G = (\int g^q)^{\frac{1}{q}}$.*

•On peut supposer sans perte de généralité F et G finis et non nuls.

•Posons $u = (\frac{f(x)}{F})^p$, $v = (\frac{g(x)}{G})^q$, $\alpha = \frac{1}{p}$, on a $1 - \alpha = \frac{1}{q}$, et donc en appliquant le lemme 0.1 on obtient

$$\frac{f(x).g(x)}{FG} \leq \frac{1}{p}\frac{f(x)^p}{F^p} + \frac{1}{q}\frac{g(x)^q}{G^q}$$

•En intégrant on obtient

$$\frac{1}{FG}\int fg \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ce qui achève la preuve.

Application 0.1 Les applications sont notamment : l'inégalité de Schwartz ci-dessous, l'inégalité de Minkovski 0.4, le théorème 0.8 (dualité dans les espaces L^p), les partie 1.4.1 et 1.4.2 et le théorème **??** (propriétés et cas particuliers des L^p), le théorème **??** (densité de fonctions à support compact).

Corollaire 0.3 **Inégalité de Schwartz**
Soient f et g deux fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors

$$\int |f.g| \leq \sqrt{\int f^2}.\sqrt{\int g^2}$$

Démonstration *Spécialisation du théorème 0.2 dans le cas $p = q = 2$.*

Théorème 0.4 **Inégalité de Minkowski**
Soit $p \in]1, +\infty[$, et soient f et g des fonctions mesurables de X dans $[0, +\infty]$.
Alors

$$\left(\int (f+g)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (\int f^p)^{\frac{1}{p}} + (\int g^p)^{\frac{1}{p}}$$

Démonstration *•Si $(\int (f+g)^p)^{\frac{1}{p}}$ est infinie, alors par convexité de $x \mapsto x^p$, on peut écrire*

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \leq \frac{f^p + g^p}{2},$$

et donc déduire que l'inégalité annoncée est vraie.
•On suppose maintenant que $(\int (f+g)^p)^{\frac{1}{p}}$ est finie.
•On considère q conjugué à p.
•Alors par le théorème 0.2, on peut écrire les deux inégalités suivantes :

$$\int f.(f+g)^{p-1} \leq (\int f^p)^{\frac{1}{p}}.(\int (f+g)^{(p-1).q})^{\frac{1}{q}}$$

$$\int g.(f+g)^{p-1} \leq (\int g^p)^{\frac{1}{p}}.(\int (f+g)^{(p-1).q})^{\frac{1}{q}}$$

•On additionne et on obtient l'inégalité annoncée, en remarquant que

$$(p-1)q = p.$$

1.2 Espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p

On se donne $p \in [1, +\infty]$. On note bien que p peut être $+\infty$.

1.2.1 Normes N_p

Définition 0.2 **Normes N_p**
Si $p \in [1, +\infty[$ alors on note N_p l'application qui à une fonction f de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou de X dans $\mathbb{C}$ associe $(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}$.

On appelle **majorant essentiel** d'une fonction f tout M dans $(0, +\infty]$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour presque tout x.

Si $p = +\infty$ alors on note N_∞ l'application qui à une fonction f de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou de X dans $\mathbb{C}$ associe la borne inf des majorants essentiels de f. $N_\infty(f)$ est appelée **borne supérieure essentielle** de f.

On dit qu'une fonction est **essentiellement bornée** si $N_\infty(f)$ est fini.

On note $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ ou $\mathcal{L}^p(X)$ lorsqu'il n'y a pas ambiguité l'ensemble des fonctions f mesurables de (X,μ) dans $\mathbb{R}$ telles que $N^p(f)$ est fini.

Pour la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$f\mathcal{R}g \iff f(x) = g(x) \text{ presque partout}$$

on note $L^p(X,\mu)$ ou $L^p(X)$ l'ensemble des classes d'équivalence de l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{R}$ contenant au moins une fonction de $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

On définit de même $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(X,\mu)$, $L^p_{\mathbb{C}}(X,\mu)$, $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(X)$ et $L^p_{\mathbb{C}}(X)$, en considérant des fonctions à valeur dans $\mathbb{C}$.

On note $l^p(X)$ l'espace $L_{\mathbb{C}}(X,\mu) = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X,\mu)$ avec μ la mesure du dénombrement (il y a identité entre $L(\mathbb{N})$ et $\mathcal{L}(\mathbb{N})$ car le seul ensemble négligeable est l'ensemble vide).

On note l^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{N},\mu) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{N},\mu) = L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{N}) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$, avec μ la mesure du dénombrement.

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de nombres complexes est **sommable de somme** x si pour tout ϵ il existe $J \subset I$ finie telle que pour tout K fini telle que $J \subset K \subset I$ on ait $|x - \sum_{i\in K} x_i| \leq \epsilon$.

Intuition Pourquoi quotienter par la relation « être égales presque partout » ? D'une part parce que cela permet d'identifier des choses très proches, mais aussi parce que cela permet d'avoir un espace normé ; sans quotienter, de nombreuses fonctions, dont la « norme » est nulle, ne seraient pas nulles ; donc ce ne serait pas là une norme en bonne et due forme. On va pouvoir grâce au passage au quotient avoir un espace normé, dont on va montrer diverses bonnes propriétés (et en particulier le fait que c'est un Banach, cf plus bas).

On note que la borne supérieure essentielle d'une fonction est le plus petit majorant essentiel de cette fonction.

N_p est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(X)$ et une norme sur $L^p(X)$.

Si p est fini, $l^p(X)$ est l'ensemble des applications des f de X dans $\mathbb{C}$ telles que la famille $(|f(x)|^p)_{x\in X}$ soit sommable. $l^\infty(X)$ est l'ensemble des applications bornées de X dans $\mathbb{C}$.

1.3 Théorèmes sur les L^p

Théorème 0.5 **Convergence dominée de Lebesgue dans L^p**

On suppose ici $p \neq +\infty$.

Soit une suite (f_n) de fonctions mesurables, telle que

$$f_n(x) \to f(x) \text{ pour presque tout } x$$

$$\exists g \in L^p / \forall (x,n) |f_n(x)| \leq g(x)$$

alors la classe de f appartient à L^p et f_n tend vers f pour N^p.

Démonstration *Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée à f_n^p, avec g^p et f.*

Il est à noter que la « réciproque » du théorème de convergence dominée (voir théorème **??** et les remarques qui suivent) est vraie aussi dans L^p.

Application 0.2 Voir les théorèmes **??** (approximation par des fonctions C^∞) et le corollaire 0.6 (Fischer-Riesz) ci-dessous.

Remarque 0.1 Il suffit de considérer $f_n = \chi_{[n,+\infty[}$ pour avoir toutes les hypothèses vérifiées sans que la conclusion soit juste.

COROLLAIRE 0.6 **Théorème de Fischer-Riesz**
Les espaces L^p sont des espaces de Banach, pour $p \in [1, +\infty]$.

Application 0.3 Voir la partie 1.4.1.

Démonstration *•Il faut et il suffit de montrer la complétude. Tout d'abord on considère le cas $p = \infty$.*

Nous allons utiliser la caractérisation de la complétude pour les espaces normés selon laquelle un espace normé est complet si et seulement si toute série normalement convergence est convergente. On considère une série $\sum f_n$ normalement convergente pour N_∞. On montre qu'elle converge. Quitte à remplacer f_i par une fonction de la même classe, on peut supposer f_i bornée par $N_\infty(f_i)$ (ou tout majorant essentiel de $|f_i|$). On a alors pour tout élément x de X : $\sum_i |f_i(x)| \leq \sum_i N_\infty(f_i) < \infty$ donc par complétude de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) la série $\sum_i f_i(x)$ converge vers un nombre que l'on notera $f(x)$. On conclut en considérant le reste $\sum_{i=n+1}^\infty N_\infty(f_i)$ pour avoir la convergence de $S_n = \sum_{i=1}^n f_i$ vers f pour N_∞.

*•On s'attaque maintenant au cas $p \neq \infty$. Soit une série $\sum f_n$ de fonctions mesurables normalement convergente pour la norme L^p. On montre qu'elle converge. On note $g(x) = \sum_{n\geq 1} |f_n(x)| \in [0, \infty]$ et $g_k(x) = \sum_{n=1}^k |f_n(x)|$. Par le théorème de convergence monotone **??**,*

$$\int g^p = \lim_{k\to\infty} \int (\underbrace{\sum_{n=1}^k |f_n(x)|}_{=g_k(x)})^p = \lim_{k\to\infty} N_p(f_1 + f_2 + \cdots + f_k)^p$$

$$\leq \lim_{k\to\infty} [N_p(f_1) + N_p(f_2) + \cdots + N_p(f_k)]^p$$

(car N_p est une norme)

$$= (\sum_{n=1}^\infty N_p(f_n))^p$$

et cette quantité est finie par hypothèse. On a donc $g \in L^p$, et par suite g est fini presque partout : il existe un ensemble négligeable sur le complémentaire duquel g est fini. Sur ce même complémentaire (« presque » égal à X) la série des f_n est donc absolument convergente et donc convergente par complétude de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$. Ainsi, $F_k = \sum_{n=1}^k f_n$ converge presque partout vers une fonction F et il est clair que pour tout k, $|F_k| \leq g$ (presque partout) où $g \in L^p$. On déduit alors du théorème de convergence dominée de Lebesgue 0.5 dans L^p que $F \in L^p$ et que $F_n \to F$ dans L^p.

Intuition Bien noter que le résultat de complétude vaut aussi pour L^∞.

PROPOSITION 0.7
Pour $p \in [1, +\infty]$, si X est de mesure finie, alors $L^{p'}(X) \subset L^p(X)$ pour tout $p' \geq p$ (éventuellement p' infini).

Démonstration *Pas dur, en séparant X en l'ensemble des points où $|f| > 1$ et en l'ensemble des points où $|f| \leq 1$.*

Intuition Remarque importante ! Comme le signale la remarque qui suit le théorème **??**, l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ s'exprime en fait comme le complété de l'ensemble des fonctions continues (ou C^∞) à support compact pour la distance associée à la norme $\|.\|_p$, si $p < \infty$. Ce résultat n'est pas valable pour $p = \infty$; ici l'adhérence serait simplement l'ensemble des applications continues qui, pour tout $\epsilon > 0$, sont inférieures à ϵ [1] en dehors d'un certain compact K_ϵ. On parle de fonctions qui « tendent vers 0 à l'infini ».

La démonstration suivante, difficile, est directement extraite et simplifiée (quitte à renforcer légèrement les hypothèses - le résultat général inclut en fait X union dénombrable de parties de mesure finie) du livre de W. Rudin, Analyse réelle et complexe. On se réfèrera au très utile livre de W. Rudin pour plus d'informations.

THÉORÈME 0.8

Soit $p \in [1, \infty[$, μ mesure positive finie sur X, ϕ forme linéaire continue (à valeurs dans $\mathbb{C}$) sur $L^p(X)$. Soit q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors il existe un unique g (presque partout) [2] L^q, tel que

$$\phi(f) = \int_X fg d\mu$$

pour toute f fonction L^p et on a alors

$$\|\phi\| = \|g\|_q = \sqrt[q]{\int |g|^q}$$

Ce théorème, qui existe sous un grand nombre de formes, est appelé **théorème de représentation de Riesz**, énonce exactement un isomorphisme entre L^q et $(L^p)'$ (dual topologique de L^p). Il faut bien noter que L^p signifie $L^p(\mu)$ et L^q signifie $L^q(\mu)$.

Démonstration *L'unicité découle facilement du fait que si g et g' sont deux fonctions vérifiant la propriété 0.8, alors pour tout E mesurable, l'intégrale sur E de $g - g'$ est nulle ; donc en particulier pour E égal à l'ensemble des x pour lesquels (respectivement) $Re(g(x)) > Re(g'(x))$, $Re(g(x)) < Re(g'(x))$, $Im(g(x)) > Im(g'(x))$, $Im(g(x)) < Im(g'(x))$.*

L'existence est beaucoup plus laborieuse à prouver :

•Tout d'abord, l'inégalité de Hölder 0.2 et la relation 0.8 impliquent immédiatement $\|\phi\| \leq \|g\|_q$. Il est donc suffisant de montrer l'existence de g et le fait que $\|\phi\| \geq \|g\|_q$.

•Le cas $\phi = 0$ est trivial. Par la suite nous supposerons donc ϕ non nulle.

•Montrons tout d'abord l'existence d'une certaine fonction g telle que $\phi(f) = \int fg$ pour toute $f \in L^\infty(\mu)$. Cela se fait comme suit :

- *Définissons $\mathcal{L}(E) = \phi(\chi_E)$ pour χ_E fonction caractéristique de E mesurable de (X, μ).*
- *$\mathcal{L}$ est additive, au sens où si A et B sont disjoints, $\mathcal{L}(A \cup B) = \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B)$.*
- *Elle est dénombrablement additive. Pour le voir considérons les E_i pour i entier > 0 mesurables, disjoints, A_k égal à l'union des E_i pour i égal à $1, 2, ..., k$, et E l'union des E_i. Comme p est supposé inférieur à ∞,*

$$\|\chi_E - \chi_{A_k}\|_p = (\mu(E \setminus A_k))^{1/p} \to 0 \quad \textit{comme} \quad k \to \infty.$$

1. En module !

Par continuité de ϕ, ceci implique que $\mathcal{L}(A_k) \to \mathcal{L}(E)$.

— *$\mathcal{L}$ est donc une mesure complexe.*
— *$\mu(E) = 0$ implique que $\mathcal{L}(E) = 0$ car alors $\|\chi_E\|_p = 0$.*
— *Donc, d'après le théorème de Radon-Nikodym (qui stipule que si une mesure A et une mesure B sur un même espace mesurable sont σ-finies et vérifient que $A(E) = 0$ implique $B(E) = 0$ pour tout E mesurable, alors il existe une application g, dite densité de B par rapport à A, telle que pour tout E mesurable, $B(E) = \int gdA$) il existe g L^1 telle que pour tout E mesurable inclus dans X,*
$$\phi(\chi_E) = \int_E gd\mu = \int_X \chi_E gd\mu$$
— *Ce résultat se généralise par linéarité aux fonctions étagées mesurables.*
— *On peut ensuite le généraliser aux fonctions dans $L^\infty(\mu)$ car toute fonction f bornée (presque partout) est limite uniforme de fonctions f_i étagées mesurables ; et $\|f_i - f\|_p \to 0$; donc $\phi(f_i) \to \phi(f)$.*

•Il reste donc maintenant à montrer que g est L^q et que $\|\phi\| \geq \|g\|_q$; on pourra alors conclure que l'égalité 0.8 est bien vérifiée en notant que L^∞ est dense dans L^p. Pour se convaincre de ce dernier point, il suffit de remarquer que par convergence dominée, toute fonction f de L^p est limite de la suite des fonctions $f.\chi_{F_n}$, où F_n est l'ensemble $\{x; |f(x)| \leq n\}$.

•On traite tout d'abord le cas $p = 1$. On se donne E mesurable ; alors
$$|\int_E gd\mu| \leq \|\phi\|\|\chi_E\|_1 = \|\phi\|\mu(E)$$
Donc par le lemme 0.9 ci-dessous, $\|g\|_\infty \leq \|\phi\|$. On a donc d'une pierre deux résultats : g est L^∞, et $\|\phi\| \geq \|g\|_\infty$.

•Il reste donc à traiter le cas $p > 1$. Cela se fait en considérant α telle que $\alpha g = |g|$ et α de module constant égal à 1. Ceci est un exercice classique et peu difficile. Ensuite :

— *On définit E_n l'ensemble des x tels que $|g(x)| \leq n$.*
— *On définit $f = \chi_{E_n} \times |g^{q-1}| \times \alpha$.*
— *On constate facilement que $|f|^p = |g|^q$ sur E_n.*
— *On sait déjà que $\phi(f) = \int fg$; donc*
$$\int_{E_n} |g|^q = \int fg = \phi(f) \leq \|\phi\| \times (\int_{E_n} |g|^q)^{1/p}$$
donc
$$(\int_{E_n} |g|^q)^{1/q} \leq \|\phi\|.$$
*Par le théorème de convergence monotone **??** on peut alors dire que $\|g\|_q \leq \|\phi\|$; d'où le résultat.*

Lemme 0.9
Supposons X de mesure $\mu(X)$ fini, g appartenant à $L^1(\mu)$, S fermé de $\mathbb{C}$. Alors si pour tout E mesurable de mesure > 0 la moyenne sur E de g (i.e. $\frac{1}{\mu(E)} \int_E g(x)$) appartient à S, alors g prend ses valeurs dans S presque partout.

Démonstration *$\bullet$Considérons $\mathbb{D}$ un disque fermé dans le complémentaire de Δ.*

$\bullet$Il suffit de montrer que $\mu(E) = 0$ avec $E = g^{-1}(\mathbb{D})$; en effet, le complémentaire de S étant (comme tout ouvert) union dénombrable de disques fermés, on aura alors $g^{-1}(\mathbb{D})$ union dénombrables d'ensembles de mesure nulle, donc $g^{-1}(\mathbb{D})$ de mesure nulle.

$\bullet$Montrons donc $\mu(E) = 0$. Pour cela supposons, pour arriver à une contradiction, $\mu(E) > 0$. Alors, en posant α le centre de $\mathbb{D}$ et r son rayon,

$$|\frac{1}{\mu(E)} \int_E (g - \alpha)| = |\frac{1}{\mu(E)} \int_E (g - \alpha)|$$

$$\leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E (g - \alpha) \leq r$$

Or $\frac{1}{\mu(E)} \int_E g$ est censé appartenir à S, d'où contradiction.

1.4 Zoologie des espaces L^p

On va juste ici introduire un peu de vocabulaire, comme le cas des suites, et l'important cas du L^2 qui sert tant en analyse de Fourier.

1.4.1 Espace l^p

Pour $p < \infty$, on note l^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{N}, \mu) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{N}, \mu) = L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{N}) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$, avec μ la mesure du dénombrement. Il s'agit donc de l'espace des suites (x_i) telles que $\sum |x_i|^p$ est fini.

La norme N_p est la suivante :

$$N_p(x) = \|x\| = (\sum |x_i|^p)^{1/p}.$$

Pour cette norme, l^p est complet (cas particulier du corollaire 0.6).

L'inégalité de Hölder 0.2 se traduit quant à elle par

$$N_1(z) \leq N_p(x).N_q(y)$$

si p et q sont conjugués et si $z_i = x_i.y_i$.

On note enfin l^∞ l'espace des suites bornées.

1.4.2 Espace L^2

⊡ **Généralités** 2 est conjugué à lui-même, d'où le cas particulier. Le produit de deux fonctions de L^2 est intégrable (par l'inégalité de Hölder 0.2), et $\int |fg| \leq \sqrt{(\int |f|^2)}\sqrt{(\int |g|^2)}$

Définition 0.3 **produit scalaire euclidien usuel**

Le **produit scalaire euclidien usuel** sur $L^2(X)$ est égal à $(f, g) \mapsto < f|g >= \int f.gd\mu$.

Ce produit scalaire euclidien fait de $L^2(X)$ un espace hilbertien réel. Le **produit scalaire hermitien usuel** sur $L^2_{\mathbb{C}}(X)$ est égal à $(f, g) \mapsto < f|g >= \int \overline{f}.gd\mu$.

Ce produit scalaire hermitien fait de $L^2_{\mathbb{C}}(X)$ un espace hilbertien complexe.

⊡ **Espaces préhilbertiens L^2 et $L^2_{\mathbb{C}}$**

⊡ **Espace de Hilbert L^2 et $L^2_{\mathbb{C}}$** L^2 et $L^2_{\mathbb{C}}$ sont préhilbertiens et complets, donc ce sont des espaces de Hilbert. Ceci sera abondamment utilisé dans la partie **??** sur les séries de Fourier. Par ailleurs, le théorème 0.8 a une application immédiate ici : soit μ mesure positive finie sur X, ϕ forme linéaire bornée (à valeurs dans $\mathbb{C}$) sur $L^2(X)$. Alors il existe un unique g (presque partout)[3] L^2, tel que pour tout f L^2

$$\phi(f) = \int_X fgd\mu$$

$$\text{et on a alors} \|\phi\| = \|g\|_2 = \sqrt[2]{\int |g|^2}.$$

Références

3. L'unicité presque partout signifie que si deux fonctions vérifient cette propriété, alors elles sont nécessairement égales presque partout.